PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

PHƯƠNG TRÌNH

Phương trình căn thức

Dạng 1. Phương pháp nâng lũy thừa.

Kiến thức cơ bản:

- Phương trình $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0\\ f(x)=g^2(x)\end{cases}$

- Phương trình $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}f(x)\geq 0\\ g(x)\geq 0\end{array}\right.\\ f(x)=g(x)\end{cases}$

Ví dụ 1. Giải phương trình $x-\sqrt{2x-5}=4 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x\geq\frac{5}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$pt\Leftrightarrow\sqrt{2x-5}=x-4\Leftrightarrow\begin{cases}x-4\geq 0\\ 2x-5=(x-4)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 4\\ 2x-5=x^2-8x+16\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 4\\ x^2-10x+21=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 4\\ (x-3)(x-7)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=7$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=7$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x} \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x\leq 2$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$pt\Leftrightarrow\begin{cases}2\leq x\\ x^2+2x+4=2-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\leq x\\ x^2+3x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=-2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\{-1;-2\}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{4x+1}=\sqrt{5x-6}+2\sqrt{2x-3} \qquad (x\in\mathbb{R})$$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq\frac{3}{2}$. Nhận xét rằng $x+4(2x)=4x+5x=9x$, chuyển vế, bình phương phương trình đã cho ta được:

$$pt \Leftrightarrow \sqrt{x+7} - 2\sqrt{2x-3} = \sqrt{5x-6} - \sqrt{4x+1}$$

$$\Rightarrow 9x - 5 - 2\sqrt{(x+7)(8x-12)} = 9x - 5 - 2\sqrt{(5x-6)(4x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+7)(8x-12)} = \sqrt{(5x-6)(4x+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ (4x-13)(x-2) = 0 \end{cases}$$

Suy ra $x = 2;\ x = \dfrac{13}{4}$. Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm kể trên.

Ví dụ 4. Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{x^3+1}{x+3}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -1$.

Chú ý hằng đẳng thức $x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1)$, nên phương trình đã cho được viết lại thành:

$$\sqrt{\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+3}} + \sqrt{x+1} = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x+3}} + 1\right) = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x+1}{x+3}}\left(\sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3}\right) = \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2-x+1} + \sqrt{x+3} = 0 \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{x+3}} = 1 \end{array}\right. \Rightarrow ptvn$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Dạng 2. Phương pháp đặt ẩn phụ hoàn toàn hoặc không hoàn toàn.

Kiến thức cơ bản:

- Đặt ẩn phụ hoàn toàn, đặt $t = A(x)$ đưa về phương trình ẩn t.
- Đặt ẩn phụ không hoàn toàn, đặt $t = A(x)$ phương trình sau khi biến đổi chứa hai ẩn t, x và xét đenta chính phương.
- Phương trình tổng quát dạng:

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$$a\sqrt{A(x)}+b\sqrt{B(x)}+c\sqrt{A(x)B(x)}+dC(x)=D$$

A, Đặt ẩn phụ hoàn toàn.

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16 \qquad (x\in\mathbb{R})$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1$.

Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}\ge 0$ suy ra $t^2=3x+4+2\sqrt{2x^2+5x+3}$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t=t^2-4-16\Leftrightarrow t^2-t-20=0\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0\\ (t-5)(t+4)=0\end{cases}\Leftrightarrow t=5$$

Do đó $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=5\Leftrightarrow 3x+4+2\sqrt{2x^2+5x+3}=25$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3}=21-3x\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{21}{3}\ge x\ge -1\\ 4(2x^2+5x+3)=(21-3x)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=3.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=3$.

Ví dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}+2\sqrt{49x^2+7x-42}=181-14x \qquad (x\in\mathbb{R})$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1$.

Đặt $t=\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}\ge 0$ suy ra $t^2=14x+1+2\sqrt{49x^2+7x-42}$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t+t^2-1=181\Leftrightarrow t^2+t-182=0\Leftrightarrow \begin{cases} t\ge 0\\ (t-13)(t+14)=0\end{cases}\Leftrightarrow t=13$$

Do đó $\sqrt{7x+7}+\sqrt{7x-6}=13\Leftrightarrow 14x+1+2\sqrt{49x^2+7x-42}=169$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{49x^2+7x-42}=84-7x\Leftrightarrow \begin{cases} 12\ge x\ge \frac{6}{7}\\ (49x^2+7x-42)^2=(84-7x)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=6.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=6$.

B, Đặt ẩn phụ không hoàn toàn.

Phương trình tổng quát dạng $(a_1x+b_1)\sqrt{a_2x^2+b_2x+c_2}=a_3x^2+b_3x+c_3$.

Ví dụ 1. Giải phương trình $(x+1)\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

- Bước 1. Đặt $t=\sqrt{f(x)}$ đưa về phương trình bậc hai ẩn t.
- Bước 2. Tính Δ theo x và biểu diễn $\Delta=(ax+b)^2\Rightarrow t=g(x)$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+3}=x^2+1-2x+2\Leftrightarrow x^2+1=t^2+2x-2$, khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$(x+1)t=t^2+2x-2\Leftrightarrow t^2-(x+1)t+2x-2=0\qquad(*)$$

Có $\Delta_{(*)}=(x+1)^2-4(2x-2)=x^2-6x+9=(x-3)^2$ nên ta được:

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{x+1+x-3}{2}=x-1\\ t=\dfrac{x+1-x+3}{2}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-2x+3}=x-1\\ \sqrt{x^2-2x+3}=2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=1\pm\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $x^2-4x+(x-3)\sqrt{x^2-x-1}-1=0\qquad(x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x^2-x-1\ge 0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2-x-1}\ge 0\Leftrightarrow x^2-x-1=t^2\Leftrightarrow x^2=t^2+x+1$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t^2+x+1-4x+(x-3)t-1=0\Leftrightarrow t^2+(x-3)t-3x=0\qquad(*)$$

Ta có $\Delta_{(*)}=(x-3)^2-4(-3x)=x^2+6x+9=(x+3)^2\ge 0$ nên ta được:

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\dfrac{3-x+x+3}{2}=3\\ t=\dfrac{3-x-x-3}{2}=-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-x-1}=3\\ \sqrt{x^2-x-1}=-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\left\{-1;\dfrac{1\pm\sqrt{41}}{2}\right\}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$3\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=x\left(1+3x+8\sqrt{2x^2+1}\right)\qquad(x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải. Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho tương đương với: $3x^2+x+3+(8x-3)\sqrt{2x^2+1}=0$

Đặt $t=\sqrt{2x^2+1}\ge 1\Leftrightarrow t^2=2x^2+1\Leftrightarrow 3t^2-3x^2=3x^2+3$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $3t^2+(8x-3)t-3x^2+x=0 \qquad (*)$

Ta có $\Delta_{(*)}=(8x-3)^2-12(x-3x^2)=100x^2-60x+9=(10x-3)^2\ge 0$ nên

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3-8x+10x-3}{6}=\dfrac{x}{3} \\ t=\dfrac{3-8x-10x+3}{6}=1-3x \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 3\sqrt{2x^2+1}=x \\ \sqrt{2x^2+1}=1-3x \end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=0$.

Ví dụ 4. Giải phương trình $(4x-1)\sqrt{x^3+1}=2x^3+2x+1 \qquad (x\in\mathbb{R})$.

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -1$.

Đặt $t=\sqrt{x^3+1}\ge 0\Leftrightarrow x^3+1=t^2\Leftrightarrow x^3=t^2-1$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$2(t^2-1)-(4x-1)t+2x+1=0\Leftrightarrow 2t^2-(4x-1)t+2x-1=0 \qquad (*)$$

Ta có $\Delta_{(*)}=(4x-1)^2-8(2x-1)=16x^2-24x+9=(4x-3)^2\ge 0$ nên

$$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{4x-1+4x-3}{4}=2x-1 \\ t=\dfrac{4x-1-4x+3}{4}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^3+1}=2x-1 \\ 2\sqrt{x^3+1}=1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=\left\{2;-\sqrt[3]{\dfrac{3}{4}}\right\}$.

Dạng 1. *Phương trình đưa về tổng các đại lượng không âm hoặc* $A^n=B^n$.

Dấu hiệu: Hệ số trước căn thường là những số chẵn.

1. Đưa về tổng các đại lượng không âm.
   Dùng các biến đổi hoặc tách ghép hằng đẳng thức để phương trình đã cho xuất hiện các số không âm $A^2+B^2+D\sqrt{C}+...=0\Leftrightarrow\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$
2. Biến đổi về dạng $A^n=B^n$.



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Đưa phương trình về dạng $\begin{cases} A^n = B^n \\ n,k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow n = 2k+1$.

Hoặc về dạng $\begin{cases} A^n = B^n \\ n,k \in \mathbb{Z}^+ \end{cases} \Leftrightarrow |A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A + B = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow n = 2k$.

Bài tập ví dụ.

Ví dụ 1. Giải phương trình $4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1} = 4x^2 + 3x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$pt \Leftrightarrow 4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + 3x + 3 - 2\sqrt{2x-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(4x^2 - 4x\sqrt{x+3} + x + 3\right) + \left(2x - 1 - \sqrt{2x-1} + 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(2x - \sqrt{x+3}\right)^2 + \left(\sqrt{2x-1} - 1\right)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \sqrt{x+3} = 0 \\ \sqrt{2x-1} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \sqrt{x+3} \\ \sqrt{2x-1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $4\sqrt{6x+10} = 4x^2 + 14x + 11 \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -\frac{5}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$pt \Leftrightarrow 6x + 10 + 4\sqrt{6x+10} + 4 = 4x^2 + 20x + 25$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{6x+10} + 2\right)^2 = (2x+5)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{6x+10} + 2 = 2x + 5 \\ \sqrt{6x+10} + 2 + 2x + 5 = 0 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{6x+10} = 2x + 3 \\ \sqrt{6x+10} + 2x + 7 = 0 \ \ (ptvn) \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ 6x + 10 = (2x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{4}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{-3 + \sqrt{13}}{4}$.

Bài tập vận dụng.

Vận dụng 1. Giải phương trình

$$4x^2 + 12 + \sqrt{x-1} = 4\left(x\sqrt{5x-1} + \sqrt{9-5x}\right) \quad (x \in \mathbb{R})$$

Lời giải. Điều kiện: $\frac{9}{5} \ge x \ge \frac{1}{5}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(4x^2+5x-1-4x\sqrt{5x-1}\right)+\left(13-5x-4\sqrt{9-5x}\right)+\sqrt{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{5x-1}\right)^2+\left(\sqrt{9-5x}-2\right)^2+\sqrt{x-1}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}2x=\sqrt{5x-1}\\ \sqrt{9-5x}=2\\ \sqrt{x-1}=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Vận dụng 2. Giải phương trình $x^2+6\sqrt{3x+1}-x-9=0 \qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{3}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$pt \Leftrightarrow x^2-x=9-6\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow x^2+2x+1=9-6\sqrt{3x+1}+3x+1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2=\left(3-\sqrt{3x+1}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+1=3-\sqrt{3x+1}\\ x+1=\sqrt{3x+1}-3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3x+1}=2-x\\ \sqrt{3x+1}=x+4\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\ 3x+1=(2-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{7-\sqrt{37}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\frac{7-\sqrt{37}}{2}$.

Vận dụng 3. Giải phương trình

$$x^3-3x^2-(x+1)\sqrt{x+2}+6x=4\sqrt{x+2}-6 \qquad (x\in\mathbb{R})$$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -2$. Chú ý $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$.

Và $(x+1)\sqrt{x+2}+4\sqrt{x+2}-3x-7=(x+2-1)\sqrt{x+2}+4\sqrt{x+2}-3x-7$

$=\left(\sqrt{x+2}\right)^3-3(x+2)+3\sqrt{x+2}-1=\left(\sqrt{x+2}-1\right)^3$. Khi đó ta được

$$pt \Leftrightarrow (x-1)^3=\left(\sqrt{x+2}-1\right)^3 \Leftrightarrow x-1=\sqrt{x+2}-1$$

$$\Leftrightarrow x=\sqrt{x+2} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2=x+2\end{cases} \Leftrightarrow x=2$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=2$.



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Dạng 2. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng hai ẩn.

Ví dụ. Giải phương trình $x^2-2x=2\sqrt{2x-1}\quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge\frac{1}{2}$. Đặt $y=\sqrt{2x-1}\ge 0$, khi đó $y^2=2x-1$.

Và phương trình đã cho trở thành $\begin{cases}x^2-2x=2y\\ y^2=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2=2y+1\\ y^2=2(x-1)+1\end{cases}$

Với $a=x-1$ thì hệ phương trình trên $\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=2y+1\\ y^2=2a+1\end{cases}\Rightarrow a^2-y^2=2y-2a$

$$\Leftrightarrow(a-y)(a+y)+2(a-y)=0\Leftrightarrow(a-y)(a+y+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=y\\ a+y+2=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-1=\sqrt{2x-1}\\ x+1+\sqrt{2x-1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ (x-1)^2=2x-1\end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=2+\sqrt{2}$.

Bài toán tổng quát. Giải phương trình

$$\sqrt{ax+b}=c(dx+e)^2+\alpha x+\beta\qquad (x\in\mathbb{R})\text{ với }\begin{cases}e=bc+\beta\\ d=ac+\alpha\end{cases}$$

Chọn $\begin{cases}a=2;\ b=-1;\ c=\frac{1}{2}\\ \alpha=0;\ \beta=-\frac{1}{2};\ d=1;\ e=-1\end{cases}$ ta được $\sqrt{2x-1}=\frac{1}{2}(x-1)^2-\frac{1}{2}$.

Hoặc phương trình $\sqrt{ax+b}=\frac{1}{a}x^2+cx+d\ \ (x\in\mathbb{R})$ với $b+ad=\frac{a^2c}{2}\left(1+\frac{c}{2}\right)$

Xét hàm số $y=\frac{1}{a}x^2+cx+d$ có đạo hàm $y'=\frac{2}{a}x+c=0\Leftrightarrow x=-\frac{ac}{2}$.

Khi đó bằng phép đặt $\sqrt{ax+b}=y+\frac{ac}{2}$, ta sẽ đưa phương trình về được dạng hệ phương trình đối xứng quen thuộc.

Ví dụ 1. Giải phương trình $3x^2+x-\frac{29}{6}=\sqrt{\frac{12x+61}{36}}\qquad (x\in\mathbb{R})$



Làm nháp. $f(x) = 3x^2 + x - \frac{29}{6} \Rightarrow f'(x) = 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$.

Lời giải. Điều kiện: $12x + 61 \geq 0$.

Đặt $\sqrt{\frac{12x+61}{36}} = y + \frac{1}{6}$ suy ra $\frac{12x+61}{36} = y^2 + \frac{1}{3}y + \frac{1}{36}$

$\Leftrightarrow 12x + 61 = 36y^2 + 12y + 1 \Leftrightarrow 3y^2 + y = x + 5$

Mà theo cách đặt ta có $3x^2 + x - \frac{29}{6} = y + \frac{1}{6} \Leftrightarrow 3x^2 + x = y + 5$.

Do đó phương trình đã cho $\begin{cases} 3x^2 + x = y + 5 \\ 3y^2 + y = x + 5 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 - 3y^2 + x - y = y - x$

$$\Leftrightarrow 3(x-y)(x+y) + 2(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(3x+3y+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = -\frac{3x+2}{3} \end{array}\right.$$

- Với $x = y$ ta được $3x^2 = 5 \Leftrightarrow x = y = \sqrt{\frac{5}{3}}$ vì $y \geq -\frac{1}{6}$.
- Với $y = -\frac{3x+2}{3}$ ta được $3x^2 + x = -\frac{3x+2}{3} + 5 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{14}}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{14}}{3}; \sqrt{\frac{5}{3}} \right\}$.

Dạng 3. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đối xứng hai ẩn bằng phương pháp đồng nhất hệ số.

Ví dụ. Giải phương trình $4x^2 + 4x - 3 = \sqrt{2x+5} \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -\frac{5}{2}$. Đặt $\sqrt{2x+5} = 2y + 1;\ y \geq -\frac{1}{2}$.

Khi đó $2x + 5 = (2y+1)^2 \Leftrightarrow 4y^2 + 4y + 1 = 2x + 5 \Leftrightarrow 4y^2 + 4y - 4 = 2x$.

Nên phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x - 3 = 2y + 1 \\ 4y^2 + 4y - 4 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x - 4 = 2y & (1) \\ 4y^2 + 4y - 4 = 2x & (2) \end{cases}$$

Lấy $pt(1) - pt(2)$ ta được $4x^2 - 4y^2 + 4x - 4y = 2y - 2x$

$$\Leftrightarrow 4(x-y)(x+y)+6(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(4x+4y+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=-\dfrac{2x+3}{2} \end{array}\right.$$

- Với $x=y$ ta được $\begin{cases} y \geq -\dfrac{1}{2} \\ 2y^2+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$.
- Với $y=-\dfrac{2x+3}{2}$ ta được $\sqrt{2x+5}=4-2x \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ 2x+5=(4-2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{37}}{4}.$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là $x=\left\{\dfrac{9\pm\sqrt{37}}{4};\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

Phương pháp tổng quát. Đặt $\sqrt{2x+5}=Ay+B \geq 0$ với mục đích là đưa về hệ phương trình đối xứng hai ẩn dạng $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$

Ta có $\sqrt{2x+5}=Ay+B \Leftrightarrow 2x+5=(Ay+B)^2 \Leftrightarrow A^2y^2+2ABy+B^2=2x+5$

Và $4x^2+4x-3=Ay+B$, khi đó ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4x^2+4x-3=Ay+B \\ A^2y^2+2ABy+B^2=2x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+4x-3-B=Ay \\ A^2y^2+2ABy+B^2-5=2x \end{cases}$$

Để đưa về được hệ phương trình đối xứng hai ẩn, tức là hai giá trị x,y có vai trò như nhau. Nên thế $x=y$ vào hệ phương trình trên ta có được:

$$\begin{cases} 4x^2+4x-3-B=Ax \\ A^2x^2+2ABx+B^2-5=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=A^2 \\ 4=2AB \\ -3-B=B^2-5 \\ A=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=1 \end{cases}$$

Do đó ta có phép đặt $\sqrt{2x+5}=2y+1;\ y \geq -\dfrac{1}{2}$ và được lời giải như trên.

Bài tập vận dụng.



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Vận dụng 1. Giải phương trình $\sqrt{9x-5}=3x^2+2x+3 \quad (x\in\mathbb{R})$

Đáp số: phương trình vô nghiệm.

Vận dụng 2. Giải phương trình $x^2-x=2004\left(\sqrt{1+16032x}+1\right) \quad (x\in\mathbb{R})$

Đáp số: $x=4009$.

Vận dụng 3. Giải phương trình $\sqrt[3]{81x-8}=x^3-2x^2+\frac{4}{3}x-2 \quad (x\in\mathbb{R})$

Đáp số: $x=\left\{0;\frac{3\pm2\sqrt{6}}{3}\right\}$.

Dạng 4. Đặt ẩn phụ phương trình chứa căn bậc ba đưa về hệ đối xứng.

Phương pháp.

- Đặt ẩn phụ bằng căn thức bậ ba.
- Biến đổi đưa về hệ phương trình đối xứng.

Bài tập ví dụ.

Ví dụ 1. Giải phương trình $\sqrt[3]{2}.\sqrt{3-2x^3}=\sqrt[3]{3-x^2} \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\le\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$.

Đặt $y=\sqrt{3-2x^3}\ge0$ suy ra $y^2=3-2x^3\Leftrightarrow 2x^3+y^2=3$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{2}.y=\sqrt[3]{3-x^2}\\2x^3+y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y^3=3-x^2\\2x^3+y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y^3+x^2=3\\2x^3+y^2=3\end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x^3-2y^3+y^2-x^2=0\Leftrightarrow 2(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)-(x-y)(x+y)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-y)\left[2\left(x^2+xy+y^2\right)-x-y\right]=0\Leftrightarrow x=y\Rightarrow\begin{cases}y\ge0\\2y^3+y^2=3\end{cases}\Leftrightarrow y=1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $2x+\sqrt[3]{9-x^3}=\sqrt{3x^2+13} \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $y=\sqrt[3]{9-x^3}$ suy ra $x^3+y^3=9$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ 2x + y = \sqrt{3x^2 + 13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ (2x+y)^2 = 3x^2 + 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x^2 + 4xy + y^2 = 13 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = xy \end{cases}$ nên hệ phương trình trên trở thành:

$$\begin{cases} a(a^2 - 3b) = 9 \\ a^2 + 2b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3 - 6ab = 18 \\ 2b = 13 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^3 - 3a(13 - a^2) = 18 \\ 2b = 13 - a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Từ đó suy ra $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) = \{(2;1),(1;2)\}$.

Vậy phương trình đã cho nghiệm duy nhất là $x = \{1,2\}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $x\sqrt[3]{25 - x^3}\left(x + \sqrt[3]{25 - x^3}\right) = 30 \quad (x \in \mathbb{R})$

Hướng dẫn. Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $y = \sqrt[3]{25 - x^3}$ suy ra $x^3 + y^3 = 25$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 25 \\ xy(x+y) = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\left[(x+y)^2 - 2xy\right] = 25 \\ xy(x+y) = 30 \end{cases}$$

Ví dụ 4. Giải phương trình $x + \sqrt[3]{4 - x^3} = 2 + x\sqrt[3]{4 - x^3} \quad (x \in \mathbb{R})$

Hướng dẫn. Điều kiện: $x \in \mathbb{R}$.

Đặt $y = \sqrt[3]{4 - x^3}$ suy ra $x^3 + y^3 = 4$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 4 \\ x + y = 2 + xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)\left[(x+y)^2 - 2xy\right] = 4 \\ x + y = 2 + xy \end{cases}$$

Dạng 5. Đặt ẩn phụ đưa về phương trình đẳng cấp bậc cao.

Phương pháp. Đặt ẩn đưa phương trình vô tỷ về dạng

- Đẳng cấp bậc hai $aA^2 + bAB + cB^2 = 0$.
- Đẳng cấp bậc ba $aA^3 + bA^2B + cAB^2 + dB^3 = 0$.



Xét các trường hợp để chia cả hai vế của các phương trình trên cho A hoặc B rồi đưa về ẩn $t=\frac{A}{B}$ sau đó sử dụng lược đồ Hoocner.

Bài tập ví dụ.

Ví dụ 1. Giải phương trình $x^3-3x^2+2\sqrt{(x+6)^3}=18x \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\ge -6$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$x^3-3x(x+6)+2\sqrt{(x+6)^3}=0 \quad (*)$$

Đặt $a=\sqrt{x+6}\ge 0 \Leftrightarrow x+6=a^2$ nên phương trình $(*)$ trở thành:

$$x^3-3xa^2+2a^3=0$$

Nhận xét $x=-6$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Nên chia cả hai vế cho a^3 và đặt $t=\frac{x}{a}$ suy ra $t^3-3t+2=0$.

Sử dụng lược đồ Hoocner ta có

	1	0	-3	2
1	1	1	-2	0
1	1	2	0	0

Từ đó suy ra

$$t^3-3t+2=0\Leftrightarrow (t-1)^2(t+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\\ t=-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\\ x=-2a\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{x+6}\\ x+2\sqrt{x+6}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\\ x=2-2\sqrt{7}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\left\{3;2-2\sqrt{7}\right\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3} \quad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\in\mathbb{R}$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{x-1}\\ b=\sqrt[3]{x-2}\end{cases} \Rightarrow a^3+b^3=x-1+x-2=2x-3$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$a+b=\sqrt[3]{a^3+b^3}\Leftrightarrow (a+b)^3=a^3+b^3\Leftrightarrow a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3$$

$$\Leftrightarrow 3ab(a+b)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0\\ b=0\\ a+b=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x-1}=0\\ \sqrt[3]{x-2}=0\\ \sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;\ x=2\\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right.$$



Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=\left\{1;2;\frac{3}{2}\right\}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}\qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\geq\frac{1}{2}$.

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x^2+2x}\geq\frac{\sqrt{5}}{2}\\ b=\sqrt{2x-1}\geq 0\end{cases}\Rightarrow 3a^2+b^2=3\left(x^2+2x\right)+\left(2x-1\right)=3x^2+8x-1$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$a+b=\sqrt{3a^2+b^2}\Leftrightarrow\left(a+b\right)^2=3a^2+b^2\Leftrightarrow 3a^2+b^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2-2ab=0\Leftrightarrow a\left(a-b\right)=0\Leftrightarrow a=b\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x}=\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\frac{1}{2}\\ x^2=-1\end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Dạng 6. Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình đại số.

Phương pháp. Phương trình tổng quát dạng $\sqrt[m]{af\left(x\right)+b}+\sqrt[n]{cf\left(x\right)+d}=k$.

Đặt $\begin{cases}\sqrt[m]{af\left(x\right)+b}=u\\ \sqrt[n]{cf\left(x\right)+d}=v\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}af\left(x\right)+b=u^m\\ cf\left(x\right)+d=v^n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}acf\left(x\right)+bc=cu^m\\ acf\left(x\right)+ad=av^n\end{cases}$

$\Leftrightarrow cu^m-bc=av^n-ad$. Nên phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}u+v=k\\ cu^m-bc=av^n-ad\end{cases}\Rightarrow \text{giải bằng phương pháp thế.}$$

Bài tập ví dụ.

Ví dụ 1. Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}=8\qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\leq\frac{6}{5}$.

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt[3]{3x-2}\\ b=\sqrt{6-5x}\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+2=3x\\ 6-b^2=5x\end{cases}\Rightarrow 5\left(a^3+2\right)=3\left(6-b^2\right)$.



Khi đó phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} 2a+3b=8 \\ 5(a^3+2)=3(6-b^2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{8-2a}{3} \\ 5a^3+3b^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{8-2a}{3} \\ 5a^3+3\left(\dfrac{8-2a}{3}\right)^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=4 \end{cases}$$

Nên suy ra $\begin{cases} \sqrt[3]{3x-2}=-2 \\ \sqrt{6-5x}=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6 \qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\le 12$.

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[3]{24+x} \\ b=\sqrt{12-x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3=24+x \\ b^2=12-x \end{cases} \Rightarrow a^3+b^2=36$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases} a+b=6 \\ a^3+b^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=6-a \\ a^3+(6-a)^2=36 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=6-a \\ a^3+a^2-12a=0 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b)=\{(0;6),(3;3),(-4;10)\}$$

- Với $(a;b)=(0;6)$ nên suy ra $\begin{cases} \sqrt[3]{24+x}=0 \\ \sqrt{12-x}=6 \end{cases} \Leftrightarrow x=-24$.
- Với $(a;b)=(3;3)$ nên suy ra $\begin{cases} \sqrt[3]{24+x}=3 \\ \sqrt{12-x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$.
- Với $(a;b)=(-4;10)$ nên suy ra $\begin{cases} \sqrt[3]{24+x}=-4 \\ \sqrt{12-x}=10 \end{cases} \Leftrightarrow x=-88$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\{3;-24;-88\}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt[4]{12+x}=3 \qquad (x\in\mathbb{R})$

Lời giải. Điều kiện: $x\le 5$.

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt[4]{5-x} \\ b=\sqrt[4]{12+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4=5-x \\ b^4=12+x \end{cases} \Rightarrow a^4+b^4=17$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} a+b=3 \\ a^4+b^4=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-a \\ a^4+(3-a)^4=17 \end{cases} \Leftrightarrow (a;b)=\{(1;2),(2;1)\}$$

- Với $(a;b)=(1;2)$ nên suy ra $\begin{cases} \sqrt[4]{5-x}=1 \\ \sqrt[4]{12+x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=4$.
- Với $(a;b)=(2;1)$ nên suy ra $\begin{cases} \sqrt[4]{5-x}=2 \\ \sqrt[4]{12+x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-11$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\{-11;4\}$.

Phương trình bậc cao – Kỹ thuật sử dụng lược đồ Hoocner

Lý thuyết. Xét phương trình bậc bốn $a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5=0$.

- Nếu $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$, phương trình có một nghiệm là $x=1$
- Nếu có tổng hệ số chẵn bằng tổng hệ số lẻ thì phương trình có một nghiệm là $x=-1$.

☞ *Lược đồ Hoocner (nhân ngang – cộng chéo)*

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
x_0	$a_1=A_1$	$a_1x_0+a_2=A_2$	$A_2x_0+a_3=A_3$	$A_3x_0+a_4=A_4$	$A_4x_0+a_5=0$

Khi đó x_0 là một nghiệm của phương trình đã cho, và ta phân tích phương trình ban đầu được thành $(x-x_0)(A_1x^3+A_2x^2+A_3x+A_4)=0$.

Phương trình bậc ba còn lại có nghiệm x_0' và tiếp tục sử dụng lược đồ.

Ví dụ 1. Giải phương trình $2x^4+5x^3-3x^2-8x+4=0$

Nhận xét: Tổng các hệ số của phương trình bằng 0 nên phương trình có một nghiệm là $x=1$.

Lời giải. Do có một nghiệm $x=1$ nên tách theo lược đồ Hoocner ta có:

	2	5	-3	-8	4
1	2	7	4	-4	0
-2	2	3	-2	0	0

Khi đó phương trình đã cho trở thành $(x-1)(x+2)(2x^2+3x-2)=0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\left\{-2;\frac{1}{2};1\right\}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình $4x^5-4x^4-21x^3+19x^2+20x-12=0$.

Nhận xét: Tổng các hệ số chẵn của phương trình bằng tổng các hệ số lẻ nên phương trình có một nghiệm là $x=-1$.

Lời giải. Do có một nghiệm $x=-1$ nên tách theo lược đồ Hoocner ta có:

	4	-4	-21	19	20	-12
-1	4	-8	-13	32	-12	0
2	4	0	-13	6	0	0
$\frac{1}{2}$	4	2	-12	0	0	0

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$(x+1)(x-2)(2x-1)(2x^2+x-6)=0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(2x-1)(x+2)(2x-3)=0$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\left\{2;-2;\frac{1}{2};-1;\frac{3}{2}\right\}$.

Ví dụ 3. Giải phương trình $x^4-9x^2-2x+15=0$.

Nhận xét: Đưa phương trình về dạng $f^2(x)-g^2(x)=0$.

Giả sử, tồn tại số thực m thỏa mãn

$$pt\Leftrightarrow (x^2-m)^2+2mx^2-m^2-9x^2-2x+15=0$$
$$\Leftrightarrow (x^2-m)^2+(2m-9)x^2-2x+15-m^2=0$$

Xét đa thức bậc hai $f(x)=(2m-9)x^2-2x+15-m^2$, ta muốn đưa $f(x)$ về dạng hằng đẳng thức bậc hai, thì trước hết $\Delta'_{f(x)}=0$.

Ta có $\Delta'_{f(x)}=1-(2m-9)(15-m^2)=0\Leftrightarrow m=4$. Do đó phương trình đã cho trở thành $(x^2-4)^2-(x+1)^2=0\Leftrightarrow (x^2-x-5)(x^2+x-3)=0$.

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với:



$$\left(x^4-8x^2+16\right)-\left(x^2+2x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2-4\right)^2-\left(x+1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)^2-\left(x+1\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-5\right)\left(x^2+x-3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-5=0 \\ x^2+x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\left\{\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2};\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}\right\}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm kể trên.

Ví dụ 4. Giải phương trình $\left(x^2+4x+2\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+\frac{36x}{\left(x-2\right)^2}=0$.

Nhận xét: Đưa về phương trình $\left(x+a\right)\left(x+b\right)\left(x+c\right)\left(x+d\right)=Ax^2$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq 2 \end{cases}$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$pt \Leftrightarrow \left(x^2+4x+2\right)\left(x-1\right)^2\left(x-2\right)^2+36x^3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+4x+2\right)\left(x^2-3x+2\right)^2+36x^3=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{2}{x}+4\right)\left(x+\frac{2}{x}-3\right)^2+36=0 \qquad (*)$$

Đặt $t=x+\frac{2}{x}$, phương trình $(*)$ trở thành: $\left(t+4\right)\left(t-3\right)^2+36=0$.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm kể trên.

Ví dụ 5. Giải phương trình $\left(x^2-x+1\right)^3-6\left(x+1\right)^3=\left(x^3+1\right)\left(6x^2-17x-5\right)$

Nhận xét: Đưa về phương trình đẳng cấp bậc.

- Đẳng cấp bậc hai dạng $a.A^2+b.AB+c.B^2=0$.
- Đẳng cấp bậc ba dạng $a.A^2+b.A^2B+c.AB^2+d.B^3=0$.

Lời giải. Giả sử tồn tại hai số m,n thỏa mãn:

$$6x^2-17x-5=m\left(x^2-x+1\right)+n\left(x+1\right) \Rightarrow \begin{cases} m=6 \\ n-m=-17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=6 \\ n=-1 \end{cases}$$

Và hằng đẳng thức $x^3+1=\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$.

Đặt $\begin{cases} A=x+1 \\ B=x^2-x+1 \end{cases}$, khi đó phương trình đã cho trở thành:



$$pt \Leftrightarrow A^3 - 6B^3 = AB(6A - 11B) \Leftrightarrow A^3 - 6A^2B + 11AB^2 - 6B^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - B)(A - 2B)(A - 3B) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = 2B \\ A = 3B \end{array}\right.$$

- Với $A = B$, ta được $x^2 - x + 1 = x + 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.
- Với $A = 2B$, ta được $x^2 - x + 1 = 2(x + 1) \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$.
- Với $A = 3B$, ta được $x^2 - x + 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{6}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \left\{0; 2; 2 \pm \sqrt{6}; \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$.

Ví dụ 1: Giải phương trình sau $\sqrt{x+3} + \dfrac{4x}{\sqrt{x+3}} = 4\sqrt{x}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0$

Phương trình đã cho tương đương

$$(x+3) + 4x = 4\sqrt{x(x+3)} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3} - 2\sqrt{x}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2\sqrt{x} \Leftrightarrow x + 3 = 4x \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1\}$

Ví dụ 2: Giải phương trình sau $x^2 - 4x - 2 = 4\sqrt{2x-1}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \dfrac{1}{2}$

Phương trình đã cho tương đương



$x^2-4x-2+(2x-1)+4=(2x-1)+4\sqrt{2x-1}+4 \Leftrightarrow x^2-2x+1=\left(\sqrt{2x-1}+2\right)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2=\left(\sqrt{2x-1}+2\right)^2$

.

Phương trình $(*)$ tương đương $\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}+2=x-1\\ \sqrt{2x-1}+2=1-x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}=x-3\\ \sqrt{2x-1}=-x-1\end{array}\right.$

Với $\sqrt{2x-1}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\ 2x-1=(x-3)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 3\\ x^2-8x+10=0\end{cases} \Rightarrow x=4+\sqrt{6}$

Với $\sqrt{2x-1}=-x-1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1}+x+1=0\,(vn)$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{4+\sqrt{6}\right\}$

<u>Ví dụ 3:</u> Giải phương trình sau $\sqrt{x-1}+\frac{7}{2}=4x+\frac{1}{x}$

<u>Lời giải</u>

Điều kiện: $x\ge 1$

Phương trình đã cho tương đương

$8x^2-7x+2+x^2+(x-1)=x^2+2x\sqrt{x-1}+(x-1) \Leftrightarrow 9x^2-6x+1=\left(\sqrt{x-1}+x\right)^2$

$\Leftrightarrow (3x-1)^2=\left(\sqrt{x-1}+x\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}+x=3x-1\\ \sqrt{x-1}+x=1-3x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=2x-1\\ \sqrt{x-1}=1-4x\end{array}\right.$

Với $\sqrt{x-1}=2x-1 \Leftrightarrow x-1=(2x-1)^2 \Leftrightarrow 4x^2-5x+2=0\,(vn)$

Với $\sqrt{x-1}=1-4x \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+4x-1=0\,(vn)$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm

<u>Ví dụ 4:</u> Giải phương trình sau $\sqrt{x^2+x+2}+\frac{1}{x}=\frac{13-7x}{2}$

<u>Lời giải</u>

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Điều kiện: $x \neq 0$

Phương trình đã cho tương đương

$$2x\sqrt{x^2+x+2}+2=13x-7x^2 \Leftrightarrow \left(x^2+x+2\right)-2x\sqrt{x^2+x+2}+x^2=9x^2-12x+4$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)^2=(3x-2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+2}-x=3x-2\\ \sqrt{x^2+x+2}-x=2-3x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+x+2}=4x-2\\ \sqrt{x^2+x+2}=2-2x\end{array}\right.$$

Với $\sqrt{x^2+x+2}=4x-2 \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq \dfrac{1}{2}\\ x^2+x+2=(4x-2)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq \dfrac{1}{2}\\ 15x^2-17x+2=0\end{cases} \Rightarrow x=1$

Với $\sqrt{x^2+x+2}=2-2x \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 1\\ x^2+x+2=(2-2x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 0\\ 3x^2-9x+2=0\end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{9-\sqrt{57}}{6}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{1;\dfrac{9-\sqrt{57}}{6}\right\}$

<u>Ví dụ 5:</u> Giải phương trình sau $\sqrt{3+x^2}=\dfrac{2x(2-x)}{2x-1}$

<u>Lời giải</u>

Điều kiện: $x \neq \dfrac{1}{2}$

Phương trình đã cho tương đương

$$2(2x-1)\sqrt{3+x^2}=8x-4x^2 \Leftrightarrow (2x-1)^2+2(2x-1)\sqrt{3+x^2}+\left(3+x^2\right)=x^2+4x+4$$

$$\Leftrightarrow \left(2x-1+\sqrt{3+x^2}\right)^2=(x+2)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1+\sqrt{3+x^2}=x+2\\ 2x-1+\sqrt{3+x^2}=-x-2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{3+x^2}=3-x\\ \sqrt{3+x^2}=-3x-1\end{array}\right.$$

Với $\sqrt{3+x^2}=3-x \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 3\\ 3+x^2=(3-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 3\\ x=1\end{cases} \Rightarrow x=1$



Với $\sqrt{3+x^2}=-3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\frac{1}{3} \\ 3+x^2=(-3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le -\frac{1}{3} \\ 8x^2+6x-2=0 \end{cases} \Rightarrow x=-1$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1;-1\}$

Ví dụ 6: Giải phương trình sau $x^2-2x-1=2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}$

Lời giải

Điều kiện: $x^2+2x-1 \ge 0$

Phương trình đã cho tương đương

$$x^2-2x-1-2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}=0 \Leftrightarrow (x^2-2x+1)-2(1-x)\sqrt{x^2+2x-1}+(x^2+2x-1)=x^2+2x+1$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1+\sqrt{x^2+2x-1}\right)^2=(x+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1+\sqrt{x^2+2x-1}=x+1 \\ x-1+\sqrt{x^2+2x-1}=-x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x-1}=2 \\ \sqrt{x^2+2x-1}=-2x \end{array}\right.$$

Với $\sqrt{x^2+2x-1}=2 \Leftrightarrow x^2+2x-1=4 \Leftrightarrow x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow x \in \left\{-1+\sqrt{6};-1-\sqrt{6}\right\}$

Với $\sqrt{x^2+2x-1}=-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x^2+2x-1=4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ 3x^2-2x+1=0 \end{cases} (vn)$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{-1+\sqrt{6};-1-\sqrt{6}\right\}$

Ví dụ 7: Giải phương trình sau $(x+2)\sqrt{(1-x)(x+3)}=x+3$

Lời giải

Điều kiện: $-3 \le x \le 1$

Phương trình đã cho tương đương



$$(x+2)\sqrt{-x^2-2x+3}=x+3 \Leftrightarrow 2(x+2)\sqrt{-x^2-2x+3}=2x+6$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2-2(x+2)\sqrt{-x^2-2x+3}+(-x^2-2x+3)=1 \Leftrightarrow \left(x+2-\sqrt{-x^2-2x+3}\right)^2=1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2-\sqrt{-x^2-2x+3}=1 \\ x+2-\sqrt{-x^2-2x+3}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{-x^2-2x+3}=x+1 \\ \sqrt{-x^2-2x+3}=x+3 \end{array}\right.$$

Với $\sqrt{-x^2-2x+3}=x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ -x^2-2x+3=(x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+2x-1=0 \end{cases} \Rightarrow x=-1+\sqrt{2}$

Với $\sqrt{-x^2-2x+3}=x+3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ -x^2-2x+3=(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ x^2+4x+3=0 \end{cases} \Rightarrow x=-1$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{-1+\sqrt{2};-1\right\}$

Ví dụ 8: Giải phương trình sau $4\sqrt{2x-1}+2\sqrt{x-1}=x+3$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1$

Phương trình đã cho tương đương

$$(x-1)+2\sqrt{x-1}+1=(2x-1)-4\sqrt{2x-1}+4 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+1\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}-2\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1}+1=\sqrt{2x-1}-2 \\ \sqrt{x-1}+1=2-\sqrt{2x-1} \end{array}\right.$$

Với

$$\sqrt{x-1}+1=\sqrt{2x-1}-2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+3=\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow x-1+9+6\sqrt{x-1}=2x-1 \Leftrightarrow 6\sqrt{x-1}=x-9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 9 \\ 36(x-1)=(x-9)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 9 \\ x^2-54x+117>0 \end{cases} \Rightarrow x=27+6\sqrt{17}$$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Với

$$\sqrt{x-1}+1=2-\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}=1 \Leftrightarrow 3x-2+2\sqrt{(x-1)(2x-1)}=1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2-3x+1}=3-3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ 4\left(2x^2-3x+1\right)=9\left(1-x^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ 17x^2-12x-5=0 \end{cases} \Rightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{27+6\sqrt{17};1\right\}$

Ví dụ 9: Giải phương trình sau $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+\frac{1}{4}x^2=2$

Lời giải

Điều kiện: $-1\le x\le 1$

Phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2-\frac{1}{4}x^2 \Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-x^2}=4-x^2+\frac{1}{16}x^4 \Leftrightarrow \left(1-x^2\right)-2\sqrt{1-x^2}+1+\frac{1}{16}x^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1-x^2}-1\right)^2+\frac{1}{16}x^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2}-1=0 \\ x^2=0 \end{cases} \Rightarrow x=0$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{0\}$

Ví dụ 10: Giải phương trình sau $1+x-2x^2=\sqrt{4x^2-1}-\sqrt{2x+1}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge \frac{1}{2}$

Phương trình đã cho tương đương



$$\left(4x^2-1\right)+2\sqrt{4x^2-1}+1=\left(2x+1\right)+2\sqrt{2x+1}+1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{4x^2-1}+1\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2-1}=\sqrt{2x-1} \Leftrightarrow 4x^2-1=2x+1 \Leftrightarrow 4x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x \in \left\{1;-\dfrac{1}{2}\right\} \end{cases} \Rightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1\}$

Ví dụ 11: Giải phương trình sau $2x^2+x+7=2x\sqrt{2x-1}+4\sqrt{x+3}$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}$

Phương trình đã cho tương đương

$$2x^2-x-2x\sqrt{2x-1}+x+\left(x+3\right)-4\sqrt{x+3}+4=0 \Leftrightarrow x\left(2x-1-2\sqrt{2x-1}+1\right)+\left(x+3-4\sqrt{x+3}+4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{x+3}-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=0 \\ \left(\sqrt{x+3}-2\right)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=1 \\ x+3=4 \end{cases} \Rightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1\}$

Ví dụ 12: Giải phương trình sau $x^2+13x+28=4\left(x+4\right)\sqrt{x+3}+2\sqrt{2x-1}$

Lời giải

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2}$

Phương trình đã cho tương đương



$$(x+4)(x+7)-4(x+4)\sqrt{x+3}+2x-1-2\sqrt{2x-1}+1=0 \Leftrightarrow (x+4)\left(x+7-4\sqrt{x+3}\right)+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)\left(\sqrt{x+3}-2\right)^2+\left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+4)\left(\sqrt{x+3}-2\right)^2=0\\ \left(\sqrt{2x-1}-1\right)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+3}=2\\ \sqrt{2x-1}=1\end{cases} \Rightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1\}$

<u>Ví dụ 13:</u> Giải phương trình sau $2(x+1)\sqrt{3x-2}+2(2x-1)\sqrt{2-x}=x^2+9x-4$

<u>Lời giải</u>

Điều kiện: $\frac{3}{2}\le x\le 2$

Phương trình đã cho tương đương

$$(x+1)(3x-2)-2(x+1)\sqrt{3x-2}+(x+1)+(2x-1)(2-x)-2(2x-1)\sqrt{2-x}+2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(3x-2-2\sqrt{3x-2}+1\right)+(2x-1)\left(2-x-2\sqrt{2-x}+1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2+(2x-1)\left(\sqrt{2-x}-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2=0\\ (2x-1)\left(\sqrt{2-x}-1\right)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{3x-2}=1\\ \sqrt{2-x}=1\end{cases} \Rightarrow x=1$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1\}$

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

TUYỂN CHỌN 2016

Bài 1: Giải phương trình: $\sqrt{2x+1}-4x^2+24x-29=0 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{2} \quad (*)$

Đặt $t=\sqrt{2x+1}, t \ge 0 \Rightarrow 2x=t^2-1$

Ta được phương trình: $t-\left(t^2-1\right)^2+12\left(t^2-1\right)-29=0 \Leftrightarrow t^4-14t^2-t+42=0$

$$\Leftrightarrow (t-2)(t+3)\left(t^2-t-7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3(loai) \\ t=\frac{1-\sqrt{29}}{2}(loai) \\ t=\frac{1+\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$$

Với $t=2 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

Với $t=\frac{1+\sqrt{29}}{2} \Rightarrow x=\frac{13+\sqrt{29}}{4}$

- Vậy phương trình có nghiệm $x=\left\{\frac{3}{2};\frac{13+\sqrt{29}}{4}\right\}$.

Bài 2: Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+x+6}-(1-2x)=5\sqrt{x+1} \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge -1 \quad (*)$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+6+1-2x}}=\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+x+6}-(1-2x)=5\sqrt{x+1} \quad (3) \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+6+1-2x}}=\sqrt{x+1}$$



$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \Rightarrow x=-1(TM) \\ \sqrt{4x^2+x+6}+1-2x=\sqrt{x+1} \quad (2) \end{array}\right.$
Kết hợp (1) và (2) ta được $2\sqrt{x+1}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-8x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$ (Thỏa mãn) • Vậy phương trình có nghiệm $x=\left\{-1;\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}\right\}$.

Bài 3: Giải phương trình: $3\sqrt{5-x}+3\sqrt{5x-4}=2x+7 \qquad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\dfrac{5}{4} \leq x \leq 5 \qquad (*)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{5-x}-(7-x)+3\left(\sqrt{5x-4}-x\right)=0$ $\Leftrightarrow \dfrac{-4+5x-x^2}{3\sqrt{5-x}+(7-x)}+\dfrac{3\left(-4+5x-x^2\right)}{\sqrt{5x-4}+x}=0$ $\Leftrightarrow \left(-4+5x-x\right)^2\left(\dfrac{1}{3\sqrt{5-x}+(7-x)}+\dfrac{3}{\sqrt{5x-4}+x}\right)=0$
$\Leftrightarrow -x^2+5x-4=0$ (Do $(*)$) $\Leftrightarrow x=1$ (Không thỏa mãn) hoặc $x=4$ (Thỏa mãn) • Vậy phương trình có nghiệm $x=4$.

Bài 4: Giải phương trình: $3x^2-8x-3=4x\sqrt{x+1} \qquad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq -1 \qquad (*)$

$\Leftrightarrow (2x-1)^2=\left(x+2\sqrt{x+1}\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1}=x-1 \\ 2\sqrt{x+1}=1-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge 1 \\ x^2-6x-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x\le \dfrac{1}{3} \\ 9x^2-10x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3+2\sqrt{3} \\ x=\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9} \end{array}\right. \text{ (Thỏa mãn)}$$

- Vậy phương trình có nghiệm $x=\left\{\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9};3+2\sqrt{3}\right\}$.

Bài 5: Giải phương trình $8x^2+\sqrt{10x+11}+\sqrt{14x+18}=11$ (1)

Bài giải:

ĐK: $x\ge -\dfrac{11}{10}$

$(1)\Leftrightarrow\ 4\left(2x^2+x-1\right)+\left(\sqrt{10x+11}-2x-3\right)+\left(\sqrt{14x+18}-2x-4\right)=0$

$\Leftrightarrow 4\left(2x^2+x-1\right)-\dfrac{2\left(2x^2+x-1\right)}{\sqrt{10x+11}+2x+3}-\dfrac{2\left(2x^2+x-1\right)}{\sqrt{14x+18}+2x+4}=0$

$+)2x^2+x-1=0\Leftrightarrow x=-1\vee x=\dfrac{1}{2}$ (tmđk)

$+)f\left(x\right)=2-\dfrac{1}{\sqrt{10x+11}+2x+3}-\dfrac{1}{\sqrt{14x+18}+2x+4}=0$

Ta có: $f'\left(x\right)>0\forall x\ge -\dfrac{11}{10}\Rightarrow$ f(x) đồng biến trên $\left[\dfrac{-11}{10};-\infty\right)$

Từ đó $f\left(x\right)\ge f\left(-\dfrac{11}{10}\right)>0$ nên trường hợp này vô nghiệm.

- Vậy phương trình có nghiệm $x=\left\{-1;\dfrac{1}{2}\right\}$.



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bài 6: Giải phương trình: $6\sqrt[3]{x-1}+2x\sqrt{x+2}=2x^2-x+8$ $\quad(1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x\ge -2$ $\quad(*)$

Xét $-2\le x\le 1\Rightarrow 6\sqrt[3]{x-1}+2x\sqrt{x+2}\le 2\sqrt{3}<7<2x^2-x+8$ nên (1) không có nghiệm trên $(-\infty;1]$

Xét $x>1$, khi đó $6\sqrt[3]{x-1}+2x\sqrt{x+2}\le 2\left((x-1)+1+1\right)+x\dfrac{4+(x+2)}{2}=\dfrac{x^2+10x+4}{2}$

Mà $\dfrac{x^2+10x+4}{2}\le 2x^2-x+8\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}(x-2)^2\ge 0$. Do đó (3) xảy ra khi và chỉ khi x = 2.

- Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

Bài 7: Giải phương trình: $3\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-6x+6}=x$ $\quad(1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x^2-6x+6\ge 0 \end{cases}$ $\quad(*)$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x-1}=x+\sqrt{x^2-6x+6}$

$\Leftrightarrow 9(x-1)=2x^2-6x+6+2x\sqrt{x^2-6x+6}$

$\Leftrightarrow (15x-15-2x^2)^2=4x^2(x^2-6x+6)$

$\Leftrightarrow (x-5)(x-1)(4x-5)=0$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \\ x=\frac{5}{4} \end{array}\right.$. Đối chiếu điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=\frac{5}{4} \end{array}\right.$

- Vậy phương trình có nghiệm $x=\left\{\frac{5}{4};5\right\}$.

Bài 8 : Giải phương trình; $\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x+2}-2x\right)+\left(6x+11\right)\sqrt{x+2}=x^2 \qquad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x\geq -2 \qquad (*)$

$(1)\Leftrightarrow \left(x^2+6x+12\right)\sqrt{x+2}=2x^3+x^2+2x$

Với x = 0 => phương trình vô nghiệm

Với $x\neq 0$ ta có: $\left(1+\frac{6}{x}+\frac{12}{x^2}\right)\frac{\sqrt{x+2}}{x}=2+\frac{x+2}{x^2}\Leftrightarrow \left(1+\frac{6\left(x+2\right)}{x^2}\right)\frac{\sqrt{x+2}}{x}=2+\frac{x+2}{x^2}$

Đặt $\frac{\sqrt{x+2}}{x}=t$. Ta có:

$\left(1+6t^2\right)t=2+t^2\Leftrightarrow 6t^3+t=2+t^2\Leftrightarrow 6t^3-t^2+t-2=0\Leftrightarrow \left(t-\frac{2}{3}\right)\left(6t^2+3t+3\right)=0$

$$\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}\Rightarrow 3\sqrt{x+2}=2x\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 4x^2-9x-18=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{9+\sqrt{377}}{8}\left(TM\right) \\ x=\frac{9-\sqrt{377}}{8}\left(loai\right) \end{array}\right. \end{cases}$$



- Vậy phương trình có nghiệm $x=\dfrac{9+\sqrt{377}}{8}$.

Bài 9: Giải phương trình: $\sqrt{2x+1}-\sqrt{5-x}+2x^2-7x-7=0 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $-\dfrac{1}{2}\le x\le 5 \quad (*)$

+) Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-3+1-\sqrt{5-x}+2x^2-7x-4=0$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-8}{\sqrt{2x+1}+3}+\frac{x-4}{1+\sqrt{5-x}}+(x-4)(2x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+3}+\dfrac{1}{1+\sqrt{5-x}}+(2x+1)=0 \end{array}\right.$$

Dễ thấy $\dfrac{2}{\sqrt{2x+1}+3}+\dfrac{1}{1+\sqrt{5-x}}+(2x+1)>0$ nên $x=4$

- Vậy phương trình có nghiệm $x=4$.

Bài 10: Giải phương trình: $\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 4y^2-2y-3\ge 0 \\ y-1\ge 0 \end{cases} \quad (*)$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Từ $(1) \Rightarrow y > 0$ kết hợp điều kiện $(*) \Rightarrow y \geq \frac{1+\sqrt{13}}{4}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\left(\sqrt{y-1}-1\right)=0 \; \frac{2(y-2)}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\left(\frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow y=2 \text{(vì } \frac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{1}{\sqrt{y-1}+1}>0 \text{ với } \forall \; y \geq \frac{1+\sqrt{13}}{4} \text{)}$$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $y=2$.

Bài 11: Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+x+6}+2x=1+5\sqrt{x+1} \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq -1 \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ thì :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+x+6}-(1-2x)=5\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+6}+1-2x}=\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ \sqrt{4x^2+x+6}+1-2x=\sqrt{x+1} \quad (2) \end{array}\right.$$

Từ $(1),(2) \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 8x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2+\sqrt{7}}{2}$ (Thỏa mãn)

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = \left\{-1; \frac{2+\sqrt{7}}{2}\right\}$.

Bài 12: Giải phương trình: $3\sqrt{x+6} + 2\sqrt{4-x} = x+8$

Bài giải:

ĐK: $\begin{cases} x+6 \ge 0 \\ 4-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \le x \le 4$

$$(1) \Leftrightarrow \left(x+6-3\sqrt{x+6}\right) + \left(2-2\sqrt{4-x}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+6)^2 - 9(x+6)}{x+6+3\sqrt{x+6}} + \frac{4-4(4-x)}{2+2\sqrt{4-x}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+6)}{x+6+3\sqrt{x+6}} + \frac{4(x-3)}{2+2\sqrt{4-x}} = 0 \Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{x+6}{x+6+3\sqrt{x+6}} + \frac{4}{2+2\sqrt{4-x}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=3 \quad \text{(nhận)} \quad \left(Do \frac{x+6}{x+6+3\sqrt{x+6}} + \frac{4}{2+2\sqrt{4-x}} > 0 \ \forall x \in [-6;4]\right)$$

- Vậy phương trình có nghiệm : $x = 3$

Bài 13: Giải phương trình: $3\sqrt{5-x} + 3\sqrt{5x-4} = 2x+7$

Bài giải:

$$3\sqrt{5-x} + 3\sqrt{5x-4} = 2x+7 \qquad \text{ĐK: } 4/5 \le x \le 5 \ (*)$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{5-x} - (7-x) + 3(\sqrt{5x-4} - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4+5x-x^2}{3\sqrt{5-x} + (7-x)} + \frac{3(-4+5x-x^2)}{\sqrt{5x-4}+x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (-4+5x-x^2)\left(\frac{1}{3\sqrt{5-x}+(7-x)}+\frac{3}{\sqrt{5x-4}+x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -x^2+5x-4=0 \quad (\text{Do } (*))$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \quad (\text{Thỏa mãn})$$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\{1;4\}$.

Bài 14: Giải phương trình: $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^3+x^2-4x-1$

Bài giải:

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^3+x^2-4x-1 \text{ , Đ/K } -2\le x\le 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\right)-3=x^3+x^2-4x-4 \Leftrightarrow \frac{2\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}-2\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\right)+3}=(x+1)(x^2-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left[(x+2)(3-x)-4\right]}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}=(x+1)(x^2-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(-x^2+x+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}=(x+2)(x^2-x-2)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-2\right)\left(\underbrace{x+2+\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}}_{>0}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-1$$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x=\{-1;2\}$.

Bài 15: Giải phương trình:

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}+4+2\sqrt{3+4x-4x^2}=\frac{1}{4}\left(4x^2-4x+3\right)\left(2x-1\right)^2$$

Bài giải:

ĐK: $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$. Phương trình: $\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)^2+\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)=\left[\frac{\left(2x-1\right)^2}{2}\right]^2+\frac{\left(2x-1\right)^2}{2}$ (*)

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^2+t$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có $f'\left(t\right)=2t+1>0\ \ \forall t\in\left[0;+\infty\right)$ nên hàm số f(t) đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$

Do đó Phương trình $(*)$ tương đương với:

$$f\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)=f\left(\frac{\left(2x-1\right)^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\frac{\left(2x-1\right)^2}{2}\Leftrightarrow 8\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)=4\left(2x-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)=\left[\left(2x+1\right)-\left(3-2x\right)\right]^2\ (**)$$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{2x+1}=a\ge 0\\ \sqrt{3-2x}=b\ge 0\end{cases}$ thì phương trình (**) trở thành

$$\begin{cases}8\left(a+b\right)=\left(a^2-b^2\right)^2\\ a^2+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8\left(a+b\right)=\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2 & (1)\\ a^2+b^2=4 & (2)\end{cases}$$



Từ (1) $\Rightarrow 8(a+b)=16-4a^2b^2 \Leftrightarrow 2(a+b)=4-a^2b^2$

$\Leftrightarrow 4(a^2+b^2+2ab)=16-8a^2b^2+a^4b^4$ (***)

Đặt ab = t $(0\le t\le 2)$ thì pt (***) trở thành $16+8t=16-8t^2+t^4 \Leftrightarrow t(t+2)(t^2-2t-4)=0$

$\Leftrightarrow t=0$ (Thỏa mãn) $\vee$ $t=-2$ (Loại) $\vee$ $t=1\pm\sqrt{5}$ (Loại)

Vậy t = 0 $\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=2\\ \sqrt{2x+1}.\sqrt{3-2x}=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{1}{2}\\ t=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

Chú ý: HS có thể giải theo cách khác như sau

Đặt $a=\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}$. ***Phương trình đã cho trở thành***

$$a(a-2)(a^2+2a-4)(a^4-8a^2-8a-8)=0$$

Bài 16: Giải phương trình: $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0$

Bài giải:

Phương trình đã cho tương đương với:

$3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=-(2x+1)\left(\sqrt{3+(2x+1)^2}+2\right)$

$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=(-2x-1)\left[2+\sqrt{(-2x-1)^2+3}\right]$

Xét hàm số $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+2\right)$ ta có $f'(t)=\sqrt{t^2+3}+2+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0$ suy ra hàm số đồng biến $\Rightarrow f(3x)=f(-2x-1)$

Từ đó suy ra $3x=-2x-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$.



- Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x=-\frac{1}{5}$.

Bài 17: Giải phương trình: $x\sqrt{x-1}=(2x-3)^2(2x-2)+x-2$.

Bài giải:

TXĐ D = $[1;+\infty)$

Phương trình $\Leftrightarrow (x-1)\sqrt{x-1}+(x-1)+\sqrt{x-1}=(2x-3)^3+(2x-3)^2+2x-3$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t^2+t \Rightarrow f'(t)=3t^2+2t+1 \Rightarrow f'(t)>0, \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có dạng $f(\sqrt{x-1})=f(2x-3)$. Từ hai điều trên phương trình (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=2x-3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3/2 \\ x-1=4x^2-12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3/2 \\ 4x^2-13x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\{2\}$.

Bài 18: Giải phương trình: $\left(5x^2-5x+10\right)\left(\sqrt{x+7}-3\right)+\left(2x+6\right)\left(\sqrt{x+2}-2\right)=x^3-2x^2+5x-10$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x\geq -2$ $(*)$

Với điều kiện $(*)$ thì $(1)\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}\right)=(x-2)\left(x^2+5\right)$



$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-x^2-5\right)=0 \quad \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ \frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-x^2-5=0 \end{array}\right.$$

+) $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn)

+) $\frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}-x^2-5=0 \Leftrightarrow \frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}=x^2+5$

$$\Leftrightarrow \frac{5x^2-5x+10}{\sqrt{x+7}+3}+\frac{2x+6}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{5x^2-5x+10}{5}+\frac{2x+6}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(5x^2-5x+10\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}-\frac{1}{5}\right)+\left(2x+6\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}-\frac{1}{2}\right)=0$$

Với điều kiện $(*)$ thì $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x+7}+3}-\frac{1}{5}>0 \\ 2x-6>0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+2}+2}-\frac{1}{2}\geq 0 \end{cases}$ và $5x^2-5x+10>0 \quad \forall x\in R$

$\Rightarrow$ Phương trình vô nghiệm.

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\{2\}$.

Bài 19: Giải phương trình: $y^2.\left(\frac{y+1}{7-y}\right)^2+y.\frac{y+1}{7-y}=13.\left(\frac{y+1}{7-y}\right)^2-1 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $y\neq 7 \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ thì:



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$(1) \Leftrightarrow y^2(y+1)^2 + y(y+1)(7-y) = 13(y+1)^2 - (7-y)^2 \Leftrightarrow y^4 + y^3 - 5y^2 - 33y + 36 = 0$

$\Leftrightarrow (y-1)(y-3)(y^2+5y+12) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=3 \end{array}\right.$ (Thỏa mãn)

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $y = \{1;3\}$.

Bài 20: Giải phương trình: $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} = x^3 + x^2 - 4x - 1 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $-2 \le x \le 3 \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}\right) - 3 = x^3 + x^2 - 4x - 4 \Leftrightarrow \frac{2\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} - 2\right)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3} = (x+1)(x^2-4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left[(x+2)(3-x) - 4\right]}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)} = (x+2)(x^2-x-2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-x^2+x+2)}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)} - (x+2)(x^2-x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-x-2)\left[x + 2 + \underbrace{\frac{2}{\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} + 3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)} + 2\right)}}_{>0 \ (vi\ \ x \ge -2\ )}\right] = 0$$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -1 \end{array}\right.$ (Thỏa mãn)

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \{-1;2\}$.



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bài 21: Giải phương trình: $\dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=(x+1)\left(\sqrt{x+1}-3\right) \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge -1 \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ thì $(1) \Leftrightarrow \dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7}=\dfrac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ \dfrac{x+4}{x^2-4x+7}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+3} \quad (2) \end{array}\right.$$

$(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)(x+4)=(x+1)\left(x^2-4x+7\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2+3\right]=\left[(x-2)+3\right].\left[(x-2)^2+3\right] \quad (3)$

Xét hàm số $f(t)=(t+3)\left(t^2+3\right)$ với $t\in\mathbb{R}$ có $f'(t)=3(t+1)^2\ge 0\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(3) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-2) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x+1=x^2-4x+4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-5x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ (Thỏa mãn)

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\left\{8;\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$.



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bài 22: Giải phương trình: $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{15-x} + 1 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq -2 \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ thì (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 3 + 2 - \sqrt[3]{15-x} = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2} - 3 + 2 - \sqrt[3]{15-x} = 0$

$$\Leftrightarrow (x-7)\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{x+2}+3} + \frac{1}{4 - 2\sqrt[3]{x+15} + \left(\sqrt[3]{x+15}\right)^2}}_{>0}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7$ (Thỏa mãn)

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 7$.

Bài 13: Giải phương trình $\left(x + \sqrt{x-4}\right)^2 + \sqrt{x + 4\sqrt{x-4}} + 2x + \sqrt{x-4} = 50$.

Bài giải:

Điều kiện $x \geq 4$ $\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x-4}\right)^2 + \sqrt{x-4} + 2 + 2x + \sqrt{x-4} = 50$
$\Leftrightarrow \left(x + \sqrt{x-4}\right)^2 + 2\left(x + \sqrt{x-4}\right) - 48 = 0$
Giải phương trình $\Rightarrow x + \sqrt{x-4} = 5$
Giải phương trình: $x + \sqrt{x-4} = 5 \Rightarrow x = 5$ • Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 5$.

Bài 23: Giải phương trình: $3x^2 - 8x - 3 = 4x\sqrt{x+1} \quad (1)$



Bài giải:

Điều kiện: $x \geq -1 \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ thì

$$(1) \Leftrightarrow (2x-1)^2 = \left(x+2\sqrt{x+1}\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{x+1} = x-1 \\ 2\sqrt{x+1} = 1-3x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-6x-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq \dfrac{1}{3} \\ 9x^2-10x-3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3+2\sqrt{3} \\ x = \dfrac{5-2\sqrt{13}}{9} \end{array}\right.$$

Cả 2 nghiêm đều thỏa mãn điều kiện $(*)$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \left\{\dfrac{5-2\sqrt{13}}{9}; 3+2\sqrt{3}\right\}$.

Bài 24: Giải phương trình: $\sqrt{4x^2+x+6}-(1-2x) = 5\sqrt{x+1} \qquad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq -1 \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ thì:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{4x^2+x+6}+1-2x} = \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ \sqrt{4x^2+x+6}+1-2x = \sqrt{x+1} \quad (2) \end{array}\right.$$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Kết hợp (1) và (2) ta được $2\sqrt{x+1} = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 4x^2-8x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$

Thử lại ta có: Phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x=-1;\ x=\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\left\{-1;\dfrac{2+\sqrt{7}}{2}\right\}$.

Bài 25: Giải phương trình: $\dfrac{2x^5+3x^4-14x^3}{\sqrt{x+2}} = \left(4x^4+14x^3+3x^2+2\right)\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{x+2}}\right)$ (1)

Bài giải:

Điền kiện: $x>-2$ (*).

PT $\Leftrightarrow x^3(2x^2+3x-14) = (4x^4+14x^3+3x^2+2)\left(\sqrt{x+2}-2\right)$

$\Leftrightarrow x^3(x-2)(2x+7)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = (4x^4+14x^3+3x^2+2)(x+2-4)$

$\Leftrightarrow x^3(x-2)(2x+7)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = (4x^4+14x^3+3x^2+2)(x-2)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \ (TM\ (*)) \\ x^3(2x+7)\left(\sqrt{x+2}+2\right) = 4x^4+14x^3+3x^2+2 \quad (1) \end{array}\right.$

(1) $\Leftrightarrow x^3(2x+7)\sqrt{x+2}+4x^4+14x^3 = 4x^4+14x^3+3x^2+2$

$\Leftrightarrow x^3(2x+7)\sqrt{x+2} = 3x^2+2$

Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm của phương trình $\Rightarrow x \neq 0$.

Khi đó, PT $\Leftrightarrow (2x+4+3)\sqrt{x+2} = \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}$

$\Leftrightarrow 2(x+2)\sqrt{x+2}+3\sqrt{x+2} = \dfrac{2}{x^3}+\dfrac{3}{x}$ (2)



Xét hàm số: $f(t)=2t^3+3t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=6t^2+3>0 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó (2) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow x\sqrt{x+2}=1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ (x+1)(x^2+x-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ (Thỏa mãn (*))}$$

- Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};2\right\}$.

Bài 26: Giải phương trình: $2x^2-6x-1=\sqrt{4x+5} \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện $x\ge -\dfrac{5}{4} \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ thì $(1)\Leftrightarrow 4x^2-8x+4=4x+5+2\sqrt{4x+5}+1$

$\Leftrightarrow (2x-2)^2=\left(\sqrt{4x+5}+1\right)^2 \Leftrightarrow |2x-2|=\sqrt{4x+5}+1$

∘ Trường hợp 1: $\begin{cases} x\ge 1 \\ \sqrt{4x+5}=2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow x=2+\sqrt{3}$ (Thỏa mãn)

∘ Trường hợp 2: $\begin{cases} x<1 \\ \sqrt{4x+5}=1-2x \end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{2}$ (Thỏa mãn)

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\left\{1-\sqrt{2};2+\sqrt{3}\right\}$.

Bài 19: Giải phương trình: $\dfrac{2}{3+\sqrt{x+1}}+\dfrac{2}{3+\sqrt{4-5x}}=\dfrac{9}{x+10} \quad (1)$



Bài giải:

Điều kiện: $-1 \le x \le \frac{4}{5}$ $(*)$

Với điều kiện $(*)$ thì:

$(1) \Leftrightarrow 2(x+10)\left(6+\sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}\right)=9\left(9+3\sqrt{x+1}+3\sqrt{4-5x}+\sqrt{x+1}\sqrt{4-5x}\right)$

$\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}-3\right)\left(9\sqrt{x+1}+9\sqrt{4-5x}-4x+41\right)=0$

(Do $x \in \left[-1;\frac{4}{5}\right]$ nên $9\sqrt{x+1}+9\sqrt{4-5x}-4x+41>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}-3=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{4-5x}=3 \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}.\sqrt{4-5x}=4+4x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}.\left(\sqrt{4-5x}-2\sqrt{x+1}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=0\\ \sqrt{4-5x}=2\sqrt{x+1}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\end{array}\right.$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\{-1;0\}$.

Bài 27: Giải phương trình: $x^4+x^2+\left(x^2+2x-1\right)^3=2-4x+2\sqrt[3]{x^2-x^4}$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x \in R$.

Phương trình tương đương $\left(x^2+2x-1\right)^3+2\left(x^2+2x-1\right)=x^2-x^4+2\sqrt[3]{x^2-x^4}$ (2)

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$, $t \in \mathbb{R}$



Ta có $f'(t)=3t^2+2>0\ \ \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Phương trình (2) có dạng $f\left(x^2+2x-1\right)=f\left(\sqrt[3]{x^2-x^4}\right)\Leftrightarrow x^2+2x-1=\sqrt[3]{x^2-x^4}\ \ (3)$

Nếu $x=0$ thay vào (3) không thỏa mãn

Nếu $x\neq 0$ thì phương trình $(3)\Leftrightarrow x-\dfrac{1}{x}+2=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-x}$. Đặt $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-x}=t$, ta có phương trình

$$t^3+t-2=0\Leftrightarrow(t-1)\left(t^2+t+2\right)=0\Leftrightarrow t=1\ \ \left(\text{Vì } t^2+t+2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0\right)$$

Với $t=1\Rightarrow\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}-x}=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}-x=1\Leftrightarrow -x^2-x+1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ (Thỏa mãn)

- Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 28: Giải phương trình: $4\sqrt{2-x}+2\sqrt{2x+4}=\sqrt{9x^2+16}\quad(1)$

Bài giải:

Điều kiện: $-2\le x\le 2\quad(*)$

Với điều kiện $(*)$ thì:

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$(1) \Leftrightarrow 32-8x+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2 \Leftrightarrow 8(4-x^2)+16\sqrt{2(4-x^2)}-(x^2+8x)=0$

Đặt: $t=\sqrt{2(4-x^2)}$ $(t\geq 0)$; PT trở thành: $4t^2+16t-(x^2+8x)=0 \Leftrightarrow t=\frac{x}{2} \vee t=-\frac{x}{2}-4$

So sánh với điều kiện ta loại $t=-\frac{x}{2}-4$

$$\sqrt{2(4-x^2)}=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\leq x\leq 2 \\ x^2=\frac{32}{9} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Bài 29: Giải phương trình: $5\left(1+\sqrt{1+x^3}\right)=x^2\left(4x^2-25x+18\right)$

Bài giải:

Điều kiện: $x\geq -1$ $(*)$

$$5\left(1+\sqrt{1+x^3}\right)=x^2\left(4x^2-25x+18\right)$$

$$\Leftrightarrow 5+5\sqrt{1+x^3}=4x^4-25x^3+18x^2$$

$$\Leftrightarrow 25x^3+25+5\sqrt{1+x^3}=4x^4+18x^2+20$$

$$\Leftrightarrow 25\left(x^3+1\right)+5\sqrt{1+x^3}=\left(4x^4+16x^2+16\right)+2x^2+4$$

$$\Leftrightarrow \left(5\sqrt{1+x^3}\right)^2+5\sqrt{1+x^3}=\left(2x^2+4\right)^2+2x^2+4 \qquad (1)$$

Hàm số $f\left(t\right)=t^2+t$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$ nên

$$(1) \Leftrightarrow f\left(5\sqrt{1+x^3}\right)=f\left(2x^2+4\right)$$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{1+x^3} = 2(x^2+2)$

$\Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 2\left[(x+1)+(x^2-x+1)\right] \quad (2)$

Đặt: $u=\sqrt{x+1} \geq 0$ và $v=\sqrt{x^2-x+1} > 0$

(2) thành: $5uv = 2(u^2+v^2) \Leftrightarrow 2\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\left(\frac{u}{v}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{u}{v}=2\\ \frac{u}{v}=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Với $\frac{u}{v}=2$: $\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}x \geq -1\\ 4x^2-5x+3=0\end{cases}$ (Vô nghiệm)

Với $\frac{u}{v}=\frac{1}{2}$: $2\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ x^2-5x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}$.

Bài 30: Giải phương trình: $(x+2)\sqrt{2x+3} = x^3+x^2+x+2 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq -\frac{3}{2} \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ thì: $(1) \Leftrightarrow (x+1)^2\left(\sqrt{2x+3}-x-1\right)\left(-4\sqrt{2x+3}-2x-8\right)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\sqrt{2}\end{array}\right.$ (Thỏa mãn)



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\left\{-1;\sqrt{2}\right\}$.

Bài 31: Giải phương trình: $\sqrt{7x^2+25x+19}-\sqrt{x^2-2x-35}=7\sqrt{x+2}$ (1)

Bài giải:

Điều kiện $x\geq 7$

Phương trình tương đương $\sqrt{7x^2+25x+19}=7\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2-2x-35}$.

Bình phương 2 vế suy ra: $3x^2-11x-22=7\sqrt{(x+2)(x+5)(x-7)}$

$$3(x^2-5x-14)+4(x+5)=7\sqrt{(x+5)(x^2-5x-14)}$$

Đặt $a=\sqrt{x^2-5x-14};b=\sqrt{x+5}$.(a ,b ≥ 0) Khi đó ta có phương trình

$$3a^2+4b^2=7ab\Leftrightarrow 3a^2-7ab+4b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\3a=4b\end{array}\right.$$

Với $a=b$ suy ra $x=3+2\sqrt{7}\,(t/m)$; $x=3-2\sqrt{7}\,(l)$.

Với $3a=4b$ suy ra $x=\dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}$ (Thỏa mãn); $x=\dfrac{61-\sqrt{11137}}{18}$ (Loại)

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\left\{3+2\sqrt{7};\dfrac{61+\sqrt{11137}}{18}\right\}$.

Bài 32: Giải phương trình: $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x\geq-\dfrac{1}{3}$ $(*)$

Với điều $(*)$ thì



$(1) \Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-x\right)\left(3+\dfrac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\dfrac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=1$.

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\{0;1\}$.

Bài 33: Giải phương trình: $3\sqrt{5-x}+3\sqrt{5x-4}=2x+7 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện $\dfrac{4}{5}\le x\le 5$ *ta có* :

$(3)\Leftrightarrow 7-x-3\sqrt{5-x}+3(x-\sqrt{5x-4})=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(7-x)^2-9(5-x)}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\dfrac{3\left(x^2-5x+4\right)}{x+\sqrt{5x-4}}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+4\right)\left(\dfrac{1}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\dfrac{3}{x+\sqrt{5x-4}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$ (Vì $\dfrac{1}{7-x+3\sqrt{5-x}}+\dfrac{3}{x+\sqrt{5x-4}}>0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$ (Thỏa mãn)

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\{1;4\}$.

Bài 34: Giải phương trình $3(2+\sqrt{x-2})=2x+\sqrt{x+6} \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x\ge 2 \quad (*)$



Với điều kiện $(*)$ thì $(1) \Leftrightarrow 2(x-3)+\sqrt{x+6}-3\sqrt{x-2}=0$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)-\frac{8(x-3)}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ 2-\dfrac{8}{\sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ \sqrt{x+6}+3\sqrt{x-2}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \text{ (Thỏa mãn)}$$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\left\{\dfrac{11-3\sqrt{5}}{2};3\right\}$.

Bài 35: Giải phương trình: $x^2+4x+14-6\sqrt{x+7}-2x\sqrt{3x-2}=0 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq \dfrac{2}{3} \quad (*)$

$$(1) \Leftrightarrow 2\left[6\sqrt{x+7}-(x+16)\right]+x\left[4\sqrt{3x-2}-(3x+2)\right]+x^2-4x+4=0$$

$$\Leftrightarrow -(x^2-4x+4)\left(\frac{2}{6\sqrt{x+7}+x+16}+\frac{9x}{4\sqrt{3x-2}+3x+2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2\left(\frac{2}{6\sqrt{x+7}+x+16}+\frac{6x-2-4\sqrt{3x-2}}{4\sqrt{3x-2}+3x+2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2\left(\frac{2}{6\sqrt{x+7}+x+16}+\frac{2\left(\sqrt{3x-2}-1\right)^2}{4\sqrt{3x-2}+3x+2}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x=2$ (Thỏa mãn)

- Vậy phương trình đã cho có nghiêm $x=2$.

Bài 36: Giải phương trình: $x^2+2x+16-6\sqrt{x+7}-2x\sqrt{x}=0 \quad (1)$



Bài giải:

Điều kiện: $x \geq 0 \quad (*)$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+7}-3\right)^2+\left(x-\sqrt{x}\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+7}-3=0\\ x-\sqrt{x}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ x=0\end{cases} \quad \text{(vô lý)} \Rightarrow \text{PT vô nghiệm}$$

- Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 37: Giải phương trình: $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+\left(4x+2\right)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0 \quad (1)$

Bài giải:
Điều kiện: $x \in R$

$$(1) \Leftrightarrow (2x+1)\left(\sqrt{(2x+1)^2+3}+2\right)=(-3x)\left(2+\sqrt{(-3x)^2+3}\right)$$

$$\Leftrightarrow f\left(2x+1\right)=f\left(-3x\right)$$

Xét $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+3}+2\right)$ có $f'(t)>0,\ \forall t.$

f là hàm số đồng biến nên: $2x+1=-3x \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=-\dfrac{1}{5}$.

Bài 38: Giải phương trình $32x^4-16x^2-9x-9\sqrt{2x-1}+2=0$ trên tập số thực.

Bài giải:

Điều kiện $x \geq \dfrac{1}{2}$, phương trình đã cho tương đương



$$32x^4-32x^2+16x^2-16x+7x-7+9-9\sqrt{2x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow 32x^2\left(x^2-1\right)+16x\left(x-1\right)+7(x-1)+9\left(1-\sqrt{2x-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 32x^2\left(x-1\right)(x+1)+16x\left(x-1\right)+7(x-1)+\frac{9\left(2-2x\right)}{1+\sqrt{2x-1}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left[32x^2(x+1)+16x+7-\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)\left[32x^3+32x^2+16x+7-\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\right]=0\ (*)$$

Ta có

$$x\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}32x^3\ge\dfrac{32}{8}=4\\32x^2\ge\dfrac{32}{4}=8\Rightarrow 32x^3+32x^2+16x+7\ge 27\\16x\ge\dfrac{16}{2}=8\end{cases}$$

$$1+\sqrt{2x-1}\ge 1\Rightarrow -\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\ge -18$$

$$\Rightarrow 32x^3+32x^2+16x+7-\frac{18}{1+\sqrt{2x-1}}\ge 9>0.$$

$(*)\Leftrightarrow x=1$.

- Vậy phương trình có nghiệm x =1.

Bài 39 : Giải phương trình : $27x^3+2x^2+20x+4=4\sqrt[3]{1+x}$ $\quad(1)$

Bài giải:

$$(1)\Leftrightarrow(3x+1)^3+4(3x+1)=x+1+4\sqrt[3]{x+1}$$



Xét hàm số: $g(t) = t^3 + 4t$ liên tục trên R.

Ta có $g'(t) = 3t^2 + 4 > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên R.

Suy ra: $g(3x+1) = g(\sqrt[3]{x+1}) \Leftrightarrow 3x+1 = \sqrt[3]{x+1} \Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 9x + 1 = x + 1$

$$\Leftrightarrow 27x^3 + 27x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 27x^2 + 27x + 8 = 0 (vn) \end{array}\right.$$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 0$.

Bài 40: Giải phương trình: $3x^2 - x + 3 = \sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+4}$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{3}$ $(*)$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2 - x\right) + \left(x + 1 - \sqrt{3x+1}\right) + \left(x + 2 - \sqrt{5x+4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - x\right)\left(3 + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x^2 - x = 0$ (Vì $3 + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}} > 0$ với mọi $x \ge -\frac{1}{3}$)

$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$ (Thỏa mãn)

- Vậy phương trình có nghiêm $x = \{0;1\}$.

Bài 41: Giải phương trình: $\frac{(x-8)(x+4)}{x^2 - 4x + 7} = (x+1)\left(\sqrt{x+1} - 3\right)$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge -1$ $(*)$

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7} = \frac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ \dfrac{x+4}{x^2-4x+7} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+3} \end{array}\right.$$

Tiếp tục giải phương trình

$$\frac{x+4}{x^2-4x+7} = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}+3}$$

$$\Leftrightarrow (x+4)\left(\sqrt{x+1}+3\right) = (x+1)(x^2-4x+7)$$

$$\Leftrightarrow \left((x+1)+3\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right) = \left((x-2)+3\right)(x^2-4x+4+3)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}^2+3\right)\left(\sqrt{x+1}+3\right) = \left((x-2)^2+3\right)\left((x-2)+3\right)$$

Xét hàm số $f(t) = (t^2+3)(t+3) = t^3+3t^2+3t+9, t \geq 0$

$f'(t) = 3t^2+3t+3 > 0, t \geq 0$

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0; +\infty)$

Từ $f\left(\sqrt{x+1}\right) = f\left((x-2)\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-2$

Giải phương trình

$$\sqrt{x+1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x+1 = x^2-4x+4 \end{cases}$$



$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$

- Vậy phương trình có nghiệm $x = \left\{8; \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Bài 42: Giải phương trình: $\dfrac{2(\frac{x}{2})^2 - x - x - 16}{x^2 - 4x + 7} = \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x+1} - 3\right)$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge -1$ $(*)$

$(1) \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 4x - 32}{x^2 - 4x + 7} = (x+1)\left(\sqrt{x+1} - 3\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-8)(x+4)}{x^2-4x+7} = \dfrac{(x+1)(x-8)}{\sqrt{x+1}+3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ \dfrac{x+4}{x^2-4x+7} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+3} \end{array}\right.$ (2)

+) $x = 8 \Rightarrow y = 4$ (tm).

+) $pt(2) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)(x+4) = (x+1)\left(x^2 - 4x + 7\right)$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}+3\right)\left[\left(\sqrt{x+1}\right)^2 + 3\right] = \left[(x-2)+3\right].\left[(x-2)^2 + 3\right]$ (3)

+) Xét hàm số $f(t) = (t+3)\left(t^2+3\right)$ với $t \in \mathbb{R}$ có $f'(t) = 3(t+1)^2 \ge 0, \forall t \in \mathbb{R}$

nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+) Mà pt(4) có dạng: $f\left(\sqrt{x+1}\right) = f(x-2)$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Do đó $(3) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x+1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 5x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$ (T/M)

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \left\{8; \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Bài 43: Giải phương trình: $3x^2 + 5x + 2 = 2\sqrt[3]{x^3+1}$ $\quad(1)$

Bài giải:

$(1) \Leftrightarrow (x+1)^3 + 2(x+1) = (x^3+1) + 2\sqrt[3]{x^3+1}$

Xét hàm số $g(t) = t^3 + 2t$ ta thấy g(t) đồng biến trên R nên từ (**) suy ra $x+1 = \sqrt[3]{x^3+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$

- Vậy phương trình có nghiệm $x = \{-1; 0\}$.

Bài 37: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-9} = 3\sqrt{x-1} - 2$ $\quad(1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge 3 \quad (*)$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-9} - 4 = 3(\sqrt{x-1} - 2) \Leftrightarrow \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x^2-9}+4} = \dfrac{3(x-5)}{(\sqrt{x-1}+2)}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4} = \dfrac{3}{(\sqrt{x-1}+2)} (2) \end{array}\right.$



Do $x\ge 3\Rightarrow \sqrt{x^2-9}<x\Rightarrow \frac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4}>\frac{x+5}{x+4}>1$ và $\frac{3}{(\sqrt{x-1}+2)}<1\Leftrightarrow 1<\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x>2$

luôn đúng khi $x\ge 3$ nên (2) vô nghiệm.

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=5$.

Bài 44: Giải phương trình: $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}=\sqrt{7}-\sqrt{3}\quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x\in R$.

Xét hàm số: $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$

Chứng minh hàm số đồng biến

Ta có nghiệm duy nhất x = 2

- Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

Bài 45: Giải phương trình: $(x-3)(x+3)=(x+1)(x^2-2x+3)(\sqrt{x+1}-2)\quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x\ge -1\qquad (*)$

$$(1)\Leftrightarrow (x-3)(x+3)=(x+1)(x^2-2x+3).\frac{x-3}{\sqrt{x+1}+2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3(TM) \\ (x+3)(\sqrt{x+1}+2)=(x+1)(x^2-2x+3)(2)\end{array}\right.$$

$$(2)\Leftrightarrow \left[(\sqrt{x+1})^2+2\right](\sqrt{x+1}+2)=\left[(x-1)+2\right]\left[(x-1)^2+2\right]$$

Xét hàm số $f(t)=(t+2)(t^2+2)$, $t\ge 0$ có $f'(t)>0\forall t\in\mathbb{R}$



Suy ra $f(t)$ đồng biến mà $f\left(\sqrt{x+1}\right)=f(x-1)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=x-1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ x^2-3x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=3\ \text{(TM)}$$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\{3\}$.

Bài 46: Giải phương trình: $4\sqrt{x+2}+\sqrt{22-3x}=x^2+8 \qquad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $-2\leq x\leq\dfrac{22}{3} \qquad (1)$

$$\Leftrightarrow\frac{4(x-2)}{\sqrt{x+2}+2}=(x-2)(x+2)+\frac{3(x-2)}{\sqrt{22-3x}+4}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \dfrac{-4}{\sqrt{x+2}+2}+(x+2)+\dfrac{3}{\sqrt{22-3x}+4}=0(2)\end{array}\right.$$

Xét *f*(*x*) = VT(2) trên [–2; 21/3], có *f'*(*x*) > 0 nên hàm số đồng biến.

Suy ra $x=-1$ là nghiệm duy nhất của (2)

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\{-1;2\}$.

Bài 47: Giải phương trình: $x^3-x+\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+4}+(x^2+2)(x^2+x)=3 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x\in R$.

$$(1)\Leftrightarrow x(x^2-1)+\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)-\left(2-\sqrt{x^2+x+4}\right)+(x^2+2)(x^2+x)=0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2-1)+\frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+x+1}+1}-\frac{-(x^2+x)}{2+\sqrt{x^2+x+4}}+(x^2+2)(x^2+x)=0$$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x-1)+\dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+1}+\dfrac{x(x+1)}{2+\sqrt{x^2+x+4}}+x(x+1)(x^2+2)=0$

$\Leftrightarrow x(x+1)\left[x-1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}+\dfrac{1}{2+\sqrt{x^2+x+4}}+x^2+2\right]=0$

$\Leftrightarrow x(x+1)\left[x^2+x+1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}+\dfrac{1}{2+\sqrt{x^2+x+4}}\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x(x+1)=0 & (2) \\ x^2+x+1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}+\dfrac{1}{2+\sqrt{x^2+x+4}}=0 & (3) \end{array}\right.$

Vì $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0;\forall x\in\mathbb{R}$

Nên $x^2+x+1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}+\dfrac{1}{2+\sqrt{x^2+x+4}}>0;\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra phương trình (3) vô nghiệm

Giải phương trình (2): $x(x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$ (Thỏa mãn)

- Vậy phương trình có nghiệm $x=\{-1;0\}$.

Bài 48: Giải phương trình: $3x^2-x+3=\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x\ge-\dfrac{1}{3}$ (*)

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-x\right)+\left(x+1-\sqrt{3x+1}\right)+\left(x+2-\sqrt{5x+4}\right)=0$



$$\Leftrightarrow (x^2 - x)\left(3 + \frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}} + \frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \quad \text{(Thỏa mãn)}$$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \{0;1\}$.

Bài 49: Giải phương trình: $3x^2 - 5\sqrt[3]{x^3+1} + 8x + 5 = 0 \quad (1)$

Bài giải:

* Phương trình tương đương với:

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 5x + 5 = x^3 + 1 + 5\sqrt[3]{x^3+1}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^3 + 5(x+1) = x^3 + 1 + 5\sqrt[3]{x^3+1}$$

Đặt $x+1 = u; \sqrt[3]{x^3+1} = v$, phương trình trở thành:

$$u^3 + 5u = v^3 + 5v \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + v^2 + uv + 5) = 0 \Leftrightarrow u = v$$

(do $u^2 + uv + v^2 + 5 > 0$ với mọi u, v)

* $\sqrt[3]{x^3+1} = x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

- Vậy phương trình có nghiêm $x = \{-1;0\}$.

Bài 50: Giải phương trình: $(x-2)\left[\log_2(x-3) + \log_3(x-2)\right] = x + 1 \qquad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x > 3 \qquad (*)$



$(1) \Leftrightarrow \log_2(x-3)+\log_3(x-2)=\dfrac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow \log_2(x-3)+\log_3(x-2)-\dfrac{x+1}{x-2}=0\ (5)$
Xét hàm số $g(x)=\log_2(x-3)+\log_3(x-2)-\dfrac{x+1}{x-2}$ trên khoảng $(3;+\infty)$ $g'(x)=\dfrac{1}{(x-3)\ln 2}+\dfrac{1}{(x-2)\ln 3}+\dfrac{3}{(x-2)^2}>0\ \forall x>3$ $\Rightarrow$ hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$. Phương trình $(5)\Leftrightarrow g(x)=g(5)\Leftrightarrow x=5$ • Vậy phương trình có nghiệm $x=5$.

Bài 51: Giải phương trình: $2x^2-11x+9=2\sqrt{2x-1}-2 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1}=2x^2-11x+11\quad(1)$

Bài giải:

$$(1)\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-11x+11\ge 0 & (*) \\ 4(2x-1)=(2x^2-11x+11)^2 & (2) \end{cases}$$

$(2)\Leftrightarrow 8x-4=4x^4+121x^2+121-44x^3+44x^2-242x$

$\Leftrightarrow 4x^4-44x^3+165x^2-250x+125=0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^3-40x^2+125x-125)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-5)(4x^2-20x+25)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \\ x=\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$ kết hợp điều kiện $(*)$ ta được $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$

• Vậy phương trình có nghiệm $x=\{1;5\}$.

Bài 52: Giải phương trình $3^{x^2-3x+3}+3^{x^2+2x}=3^{2x^2-x}+27$

Bài giải:

Phương trình đã cho tương đương $3^{x^2-3x+3}+3^{x^2+2x}=3^{2x^2-x-3}+1 \Leftrightarrow 3^{x^2+2x-3}\left(3^{x^2-3x}-1\right)-\left(3^{x^2-3x}-1\right)=0$
$\Leftrightarrow \left(3^{x^2-3x}-1\right)\left(3^{x^2+2x-3}-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{x^2-3x}-1=0\\3^{x^2+2x-3}-1=0\end{array}\right.$
$3^{x^2-3x}=1 \Leftrightarrow x^2-3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$
$3^{x^2+2x-3}=1 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$ Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm $x=0; x=-1; x=\pm 3$

Bài 53: Giải phương trình: $\sqrt{3x+3}-\sqrt{5-2x}=x^3-3x^3-10x+26 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $-1\le x\le \frac{5}{2} \quad (*)$

$(1)\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x+3}-3\right)+\left(1-\sqrt{5-2x}\right)=x^3-3x^2-10x+24$ $\Leftrightarrow \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2(x-2)}{1+\sqrt{5-2x}}=(x-2)(x^2-x-12)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2(TM)\\ \frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{1+\sqrt{5-2x}}=x^2-x-12(2)\end{array}\right.$
Phương trình (2) vô nghiệm vì với $-1\le x\le\frac{5}{2}$ thì $x^2-x-12<0$. • Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bài 54: Giải phương trình: $\sqrt{2x+1}+\sqrt[4]{2x-1}=\sqrt{x-1}+\sqrt{x^2-2x+3}$ $(x\in\mathbb{R})$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x\geq 1$.

Đặt $a=\sqrt[4]{2x-1}$ $(a\geq 0)$, ta có: $2x=a^4+1$. Phương trình đã cho trở thành:

$a+\sqrt{a^4+2}=\sqrt{x-1}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^4+2}$ (1)

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^4+2}$ với $t\geq 0$ Ta có $f'(t)=1+\dfrac{2t^3}{\sqrt{t^4+2}}>0,\forall t\geq 0.$

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

$(1)\Leftrightarrow f(a)=f(\sqrt{x-1})\Leftrightarrow a=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow \sqrt[4]{2x-1}=\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\x^2-4x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\x=2\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=2+\sqrt{2}$.

- Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x=2+\sqrt{2}$

Bài 55: Giải phương trình: $\sqrt[3]{3x+5}=x^3+3x^2+x-3$ (1)

Bài giải:

$(1)\Leftrightarrow 3x+5+\sqrt[3]{3x+5}=(x+1)^3+(x+1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t,\in R\Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in R$. Suy ra hàm số f(t) đồng biến trên R.

$(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt[3]{3x+5}\right)=f(x+1)\Leftrightarrow\sqrt[3]{3x+5}=x+1\Leftrightarrow x^3+3x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

- Vậy phương trình có nghiệm $x=\{-2;1\}$.

Bài 56: Giải phương trình: $x+\sqrt{4-x^2}=2+3x\sqrt{4-x^2}\quad(1)$

Bài giải:

ĐK: $-2\le x\le 2$.

Đặt $t=x+\sqrt{4-x^2}\Rightarrow t^2=4+2x\sqrt{4-x^2}\Rightarrow x\sqrt{4-x^2}=\dfrac{t^2-4}{2}$.

Phương trình trở thành $t=2+3\dfrac{t^2-4}{2}\Leftrightarrow 3t^2-2t-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right.$

Với t = 2 ta có:

$x+\sqrt{4-x^2}=2\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=2-x\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\ge 0\\ 4-x^2=4-4x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$ (t/m)

Với $t=-\dfrac{4}{3}$ ta

có $x+\sqrt{4-x^2}=-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=-\dfrac{4}{3}-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le-\dfrac{4}{3}\\ 9x^2+12x-10=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le-\dfrac{4}{3}\\ x=\dfrac{-2\pm\sqrt{14}}{3}\end{array}\right.\Rightarrow x=\dfrac{-2-\sqrt{14}}{3}$

(t/m).

- Vậy pt đã cho có nghiệm x = 0; x = 2; $x=\dfrac{-2-\sqrt{14}}{3}$

Bài 57: Giải phương trình: $3x\sqrt{x^3+1}=x^3+x^2-19x-16$

Bài giải:

Điều kiện: $x^3+1\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Phương trình đã cho tương đương với

$$3x\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}=(x^3+1)+(x^2-x+1)-18(x+1)$$

Đặt $a=\sqrt{x+1}, b=\sqrt{x^2-x+1}, a\ge 0, b>0$. Khi đó phương trình trở thành

$$3(a^2-1)ab=a^2b^2+b^2-18a^2$$

$\Leftrightarrow a^2b(3a-b)=b(3a-b)+2(b^2-9a^2)$

$\Leftrightarrow (3a-b)(a^2b+b+6a)=0$

$\Leftrightarrow 3a-b=0$, vì $a^2b+b+6a>0$

Suy ra $3\sqrt{x+1}=\sqrt{x^2-x+1}\Leftrightarrow x^2-10x-8=0\Leftrightarrow x=5\pm\sqrt{33}$, thỏa mãn điều kiện

- Vậy nghiệm của phương trình là $x=5\pm\sqrt{33}$

Bài 58: Giải phương trình: $x^2+x=(x+2)\sqrt{x^2-2x+3}$ (1)

Bài giải:

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+x)(x+2)\ge 0\\(x^2+x)^2=(x+2)^2(x-1)^2+2(x+2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+x)(x+2)\ge 0\\(x^2+x)^2=(x^2+x-2)^2+2(x+2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2+x)(x+2)\ge 0\\x^2-2x-6=0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{7}$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1\pm\sqrt{7}$.

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bài 59: Giải phương trình: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}-2\sqrt{x^2-16}=2x-12$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x \geq 4$ $(*)$

$(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)^2-\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}\right)-12=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=4$

Giải phương trình ta được x = 5

- Vậy phương trình có nghiệm $x=5$.

Bài 60: Giải phương trình: $\sqrt{x+\frac{3}{x}}=\frac{x^2+7}{2(x+1)}$ (1)

Bài giải:

ĐK: x > 0 $(*)$

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương:

$2(x+1)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x^2+7 \Leftrightarrow 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\sqrt{x+\frac{3}{x}}=x+\frac{7}{x}$

$\Leftrightarrow x+\frac{3}{x}-2\sqrt{x+\frac{3}{x}}+\frac{4}{x}-\frac{2}{x}\sqrt{x+\frac{3}{x}}=0 \Leftrightarrow \sqrt{x+\frac{3}{x}}\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2\right)-\frac{2}{x}\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2\right)\left(\sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+\frac{3}{x}}-2=0\\ \sqrt{x+\frac{3}{x}}-\frac{2}{x}=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-4x+3=0\\ x^3+3x-4=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-4x+3=0\\ (x-1)(x^2+x+4)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right.$.

- Vậy phương trình có 2 nghiệm x = 1; x = 3.



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bài 61: Giải phương trình: $x^5 + x^3 + x\sqrt{x} = 3$ (1)

Bài giải:

Đặt $t = \sqrt{x} > 0$ có hàm số $g(t) = t^{10} + t^6 + t^3$ có $g'(t) = 10t^9 + 6t^5 + 3t^2 > 0$ do $t > 0$

Mà $g(1) = 3 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

- Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

Bài 62: Giải phương trình: $(2x-1)\sqrt{1+x} + (2x+1)\sqrt{1-x} = 2x$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$ $(*)$

$2x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} - 1\right) - \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}\right) = 0$.

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{1+x}; a \ge 0 \\ b = \sqrt{1-x}; b \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = a^2 - b^2$

Phương trình trở thành $(a^2 - b^2)(a+b-1) - (a-b) = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)[(a+b)(a+b+1) - 1] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ (a+b)^2 + (a+b) - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a + b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

+) Với $a = b \Leftrightarrow \sqrt{1+x} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x = 0$ (Thỏa mãn)

+) Với $a + b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}\,(TM)$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

- Vậy phương trình có nghiệm $x=\left\{0;\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}\right\}$.

Bài 63: Giải phương trình

$$x^2+9+\log_2\frac{16x^2+96x+208}{\sqrt{12x+16}+\sqrt{45x+81}}=2\sqrt{3x+4}-6x+3\sqrt{5x+9}$$

Bài giải:

Điều kiện $x\ge -\frac{4}{3}$

Ta có $x^2+9+\log_2\dfrac{16x^2+96x+208}{\sqrt{12x+16}+\sqrt{45x+81}}=2\sqrt{3x+4}-6x+3\sqrt{5x+9}$

$\Leftrightarrow x^2+6x+13+\log_2(x^2+6x+13)$

$=2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}+\log_2(2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9})(*)$

Xét hàm số $f(t)=t+\log_2 t, t>0, f'(t)=1+\dfrac{1}{t\ln 2}>0$ với mọi $t>0$ nên $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ (*) suy ra $f(x^2+6x+13)=f(2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9})$ nên $x^2+6x+13=2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}$

$\Leftrightarrow x^2+x+2\left[(x+2)-\sqrt{3x+4}\right]+3\left[(x+3)-\sqrt{5x+9}\right]=0$

$\Leftrightarrow (x^2+x)+\dfrac{2(x^2+x)}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{3(x^2+x)}{x+3+\sqrt{5x+9}}=0$

$\Leftrightarrow (x^2+x)\left[1+\dfrac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}}\right]=0$

$\Leftrightarrow (x^2+x)=0$ vì $1+\dfrac{2}{x+2+\sqrt{3x+4}}+\dfrac{3}{x+3+\sqrt{5x+9}}>0\ \forall x\ge -\dfrac{4}{3}$

$\Leftrightarrow x=0; x=-1$

Đối chiếu với điều kiện ban đầu suy ra phương trình có nghiệm $x=0; x=-1$

Bài 64: Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $0\le x\le 1$ (*)

Khi đó $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=1 \Leftrightarrow 3\left(\sqrt{1-x}+1\right)=\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)(2)$

Ta thấy x = 1 là một nghiệm của phương trình (2)

Vói $0\le x<1$ thì $3\left(\sqrt{1-x}+1\right)>3$ còn $\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x}\right)<3$ nên (2) vô nghiệm.

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=1$.

Bài 65: Giải phương trình: $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=x^3+x^2-4x-1$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $-2\le x\le 3$

$$(*)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\right)-3=x^3+x^2-4x-4\Leftrightarrow\frac{2\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}-2\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}\right)+3}=(x+1)\left(x^2-4\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left[(x+2)(3-x)-4\right]}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}=(x+1)\left(x^2-4\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2\left(-x^2+x+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}=(x+2)\left(x^2-x-2\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x-2\right)\left(\underbrace{x+2+\frac{2}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+3\right)\left(\sqrt{(x+2)(3-x)}+2\right)}}_{>0}\right)=0$$

$\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=2\vee x=-1$

- Vậy phương trình có nghiệm $x=\{-1;2\}$.

Bài 66: Giải phương trình:

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}+4+2\sqrt{3+4x-4x^2}=\frac{1}{4}\left(4x^2-4x+3\right)\left(2x-1\right)^2 \quad (1)$$

Bài giải:

ĐK: $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$. Phương trình

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)^2+\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)=\left[\frac{\left(2x-1\right)^2}{2}\right]^2+\frac{\left(2x-1\right)^2}{2} \quad (2)$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^2+t$ trên $\left[0;+\infty\right)$ có

$f'\left(t\right)=2t+1>0\quad\forall t\in\left[0;+\infty\right)$ nên hàm số f(t) đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$

Do đó phương trình (2) trở thành : $f\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)=f\left(\frac{\left(2x-1\right)^2}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=\frac{\left(2x-1\right)^2}{2}\Leftrightarrow 8\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)=4\left(2x-1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}\right)=\left[\left(2x+1\right)-\left(3-2x\right)\right]^2 \ (3)$$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{2x+1}=a\ge 0\\ \sqrt{3-2x}=b\ge 0\end{cases}$ thì phương trình (3) trở thành

$$\begin{cases}8\left(a+b\right)=\left(a^2-b^2\right)^2\\ a^2+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8\left(a+b\right)=\left(a^2+b^2\right)^2-4a^2b^2 & (4)\\ a^2+b^2=4 & (5)\end{cases}$$

Từ $(4)\Rightarrow 8\left(a+b\right)=16-4a^2b^2\Leftrightarrow 2\left(a+b\right)=4-a^2b^2$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^2+b^2+2ab\right)=16-8a^2b^2+a^4b^4 \ (6)$$

Đặt $ab=t\left(0\le t\le 2\right)$ thì pt (6) trở thành

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$16+8t=16-8t^2+t^4 \Leftrightarrow t(t+2)(t^2-2t-4)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=0 & \\ t=-2 & (loai) \\ t=1+\sqrt{5} & (loai) \\ t=1-\sqrt{5} & (loai) \end{array}\right.$. Vậy $t=0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+1}+\sqrt{3-2x}=2 \\ \sqrt{2x+1}.\sqrt{3-2x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

- Vậy phương trình có nghiệm $x=\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$.

Bài 67: Giải phương trình: $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)=0 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x \in R$

$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=-(2x+1)\left(\sqrt{3+(2x+1)^2}+2\right)$

$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=(-2x+1)\left(\sqrt{3+(-2x-1)^2}+2\right)$

Xét hàm số $f(t)=t\left(\sqrt{t^2+2}+2\right)$ ta có $f'(t)=\sqrt{t^2+2}+2+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+2}}>0$ suy ra hàm số đồng biến

Từ đó suy ra $3x=-2x-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$

- Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{1}{5}$.

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bài 68: Giải phương trình: $\left(2x^2-2x+1\right)\left(2x-1\right)+\left(8x^2-8x+1\right)\sqrt{-x^2+x}=0\quad \left(x\in\mathbb{R}\right)$

Bài giải:

Đkxđ: $0\le x\le 1$

$$\Leftrightarrow \left(2x^2-2x+1\right)\left(2x-1\right)+\left(8x^2-8x+1\right)\left(2x-1\right)+\left(8x^2-8x+1\right)\left(\sqrt{-x^2+x}-\left(2x-1\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2x-1\right)\left(5x^2-5x+1\right)+\left(8x^2-8x+1\right)\left(\sqrt{-x^2+x}-\left(2x-1\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -2\left(2x-1\right)\left(\sqrt{-x^2+x}+2x-1\right)\left(\sqrt{-x^2+x}-\left(2x-1\right)\right)$$
$$+\left(8x^2-8x+1\right)\left(2x-1\right)+\left(8x^2-8x+1\right)\left(\sqrt{-x^2+x}-\left(2x-1\right)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{-x^2+x}-\left(2x-1\right)\right)\left[-2\left(2x-1\right)\left(\sqrt{-x^2+x}+2x-1\right)+\left(8x^2-8x+1\right)\left(2x-1\right)+8x^2-8x+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{-x^2+x}-\left(2x-1\right)\right)\left[-2\left(2x-1\right)\sqrt{-x^2+x}-1\right]=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sqrt{-x^2+x}=2x-1 & (*)\\ -2\left(2x-1\right)\left(\sqrt{-x^2+x}\right)-1=0 & (**)\end{array}\right.$$

$$(**)\Leftrightarrow 2\left(2x-1\right)\sqrt{-x^2+x}+1=0\left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)$$

+) Xét: $f\left(x\right)=2\left(2x-1\right)\sqrt{-x^2+x}\quad\left(0\le x\le\frac{1}{2}\right)$

$$f'\left(x\right)=2.2\sqrt{-x^2+x}+2\left(2x-1\right).\frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x}}=\frac{4\left(-x^2+x\right)-\left(2x-1\right)^2}{\sqrt{-x^2+x}}=\frac{-8x^2+8x-1}{\sqrt{-x^2+x}}$$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -8x^2+8x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\\ x=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\notin\left[0;\frac{1}{2}\right]\end{array}\right.$$



Có: $f(0)=0;\ f\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)=-\frac{1}{2};\ f\left(\frac{1}{2}\right)=0$

$\Rightarrow f(x)+1\geq\frac{1}{2}>0\ \forall x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$ => (**) vô nghiệm

$(*)\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-4x+1=-x^2+x\\ x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x^2-5x+1=0\\ x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ (Thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$

Cách 3:

Điều kiện: $x\in[0;1]$. Phương trình đã cho tương đương với:

$2x-1+(4x-2)(x^2-x)+(8x^2-8x+2-1)\sqrt{x-x^2}=0$

$\Leftrightarrow 2x-1-\sqrt{x-x^2}+(4x-2)(x^2-x)+(2x-1)(4x-2)\sqrt{x-x^2}=0$

$\Leftrightarrow 2x-1-\sqrt{x-x^2}+(4x-2)\left[(2x-1)\sqrt{x-x^2}-(x-x^2)\right]=0$

$\Leftrightarrow 2x-1-\sqrt{x-x^2}+(4x-2)\sqrt{x-x^2}\left(x-1-\sqrt{x-x^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(2x-1-\sqrt{x-x^2}\right)\left[1+(4x-2)\sqrt{x-x^2}\right]=0\quad(*)$

Dễ thấy $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\Leftrightarrow x-x^2\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow\sqrt{x-x^2}\leq\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 1=(2-4x)\sqrt{x-x^2}<(2-4x).\frac{1}{2}=1-2x\Leftrightarrow x<0$ (điều này vô lý).

Khi đó $(*)\Leftrightarrow 2x-1-\sqrt{x-x^2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{5}}$



Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Bài 69: Giải phương trình:

$$2(x-3)\sqrt{x^3+3x^2+x+3}+2\sqrt{x+1}=2x^3-3x^2-3x-14\left(x\in\mathbb{R}\right)\ (*)$$

Bài giải:

Điều kiện: $x\ge -1$

$$(*)\Leftrightarrow 2(x-3)\sqrt{(x+3)(x^2+1)}+2\sqrt{x+1}=2x^3-3x^2-3x-14$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)\sqrt{(x+3)(x^2+1)}+2\left(\sqrt{x+1}-2\right)=2x^3-3x^2-3x-18$$

$$\Leftrightarrow 2(x-3)\sqrt{(x+3)(x^2+1)}+\frac{2(x-3)}{\sqrt{x+1}+2}=(x-3)(2x^2+3x+6)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[2\sqrt{(x+3)(x^2+1)}+\frac{2}{\sqrt{x+1}+2}-2x^2-3x-6\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ 2\sqrt{(x+3)(x^2+1)}+\frac{2}{\sqrt{x+1}+2}-2x^2-3x-6=0\quad (**) \end{array}\right.$$

$$(**)\Leftrightarrow 2x^2+3x+6-2\sqrt{(x+3)(x^2+1)}=\frac{2}{\sqrt{x+1}+2}$$

Có: $\sqrt{x+1}+2\ge 2\ \forall x\ge -1$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x+1}+2}\le 1\Rightarrow 2x^2+3x-6-2\sqrt{(x+3)(x^2+1)}\le 1$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+3x+5-2\sqrt{(x+3)(x^2+1)}\le 0\Leftrightarrow 2x^2+3x+5\le 2\sqrt{(x+3)(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow 4x^4+12x^3+29x^2+30x+25\le 4x^3+12x^2+4x+12$$

$\Leftrightarrow 4x^4+8x^3+17x^2+26x+13\le 0 \Leftrightarrow \left(4x^2+13\right)\left(x+1\right)^2\le 0 \Leftrightarrow x=-1$

- Vậy phương trình có nghiệm $x=-1$, x = 3

Bài 70: Giải phương trình: $\sqrt{x^2-9}=3\sqrt{x-1}-2 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện: $x\ge 3 \quad (*)$

Cách 1:

Đặt $\sqrt{x-1}=u, u\ge\sqrt{2}\Rightarrow x=u^2+1$ thay vào (1) ta có $\sqrt{u^4+2u^2-8}=3u-2(2)$

$\Leftrightarrow u^4+2u^2-8=9u^2-12u+4 \Leftrightarrow u^4-7u^2-12u-12=0 \Leftrightarrow (u-2)\left(u^3+2u^2-3u+6\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u-2=0 \\ u^3+2u^2-3u+6=0 \end{array}\right.$

\+ $u-2=0\Rightarrow u=2\Rightarrow x=5(TM)$

\+ $u^3+2u^2-3u+6=0$ (4) ; $u\ge\sqrt{2}$

Do $u\ge\sqrt{2}$ nên $u^3+2u^2-3u+6>2u+2u-3u+6=u+6>0$ suy ra (2) vô nghiệm

- Vậy phương trình có nghiệm $x=5$.

Cách 2

$(2)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x^2-9}-4\right)-3\left(\sqrt{x-1}-2\right)=0\Leftrightarrow \frac{x^2-25}{\sqrt{x^2-9}+4}=\frac{3(x-5)}{\sqrt{x-1}+2}(3)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4}=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}+2} \end{array}\right.$

$+)\ x=5\Rightarrow$

+) $\frac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4}=\frac{3}{\sqrt{x-1}+2}$ $(5)\ \forall x\ge 3\Rightarrow \frac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4}\ge\frac{x+5}{x+4}>1>\frac{3}{2+\sqrt{2}}\ge\frac{3}{\sqrt{x-1}+2}$

$\rightarrow$ (3) vô nghiệm.

- Vậy phương trình có nghiệm $x=5$.

Bài 71: Giải phương trình: $\sqrt{4x+5}=2x^2-6x-1$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x\ge -\frac{5}{4}$ $(*)$

$PT\Leftrightarrow 2\sqrt{4x+5}=4x^2-12x-2\Leftrightarrow\left(\sqrt{4x+5}+1\right)^2=(2x-2)^2$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{4x+5}=2x-3\ (vn)\\ \sqrt{4x+5}=1-2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}\,(loai)\\ x=1-\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

- Vậy phương trình có nghiệm $x=1+\sqrt{2}$.

Bài 72: Giải phương trình: $\sqrt{x-\frac{1}{2}}+\frac{x+1}{4}=\sqrt{2x-1+\frac{(x+1)^2}{8}}$

Bài giải:

Điều kiện $x\ge\frac{1}{2}$. Đặt $u=\sqrt{x-\frac{1}{2}},v=\frac{x+1}{4};u,v\ge 0$

Pt trở thành $u+v=\sqrt{2u^2+2v^2}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\ (u+v)^2=2\left(u^2+v^2\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v\ge 0\\ (u-v)^2=0\end{cases}$



$\Leftrightarrow v=u\ge 0\Leftrightarrow \sqrt{x-\frac{1}{2}}=\frac{x+1}{4}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x-\frac{1}{2}=\frac{x^2+2x+1}{16} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2-14x+9=0 \end{cases}\Leftrightarrow x=7\pm 2\sqrt{10}$

(TM)

• Vậy nghiệm của phương trình là: $x=7\pm 2\sqrt{10}$

Bài 73: Giải phương trình $3x\sqrt[3]{x+7}\left(x+\sqrt[3]{x+7}\right)=7x^3+12x^2+5x-6$

Bài giải:

Phương trình đã cho tương đương với

$x^3+x+7+3x\sqrt[3]{x+7}\left(x+\sqrt[3]{x+7}\right)=8x^3+12x^2+6x+1$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt[3]{x+7}\right)^3=(2x+1)^3\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+7}=x+1$

$\Leftrightarrow x+7=(x+1)^3\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+4x+6\right)=0\Leftrightarrow x+1\Leftrightarrow x=-1$

• Vậy phương trình có nghiệm $x=-1$.

Bài 74: Giải phương trình $\sqrt{x(x+7)}+\sqrt{(x+7)(x+17)}+\sqrt{(x+17)(x+24)}=12+17\sqrt{2}$

Bài giải:

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x\ge 0 \\ x\le -24 \end{array}\right.$ Đặt $t=x+12\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 12 \\ t\le -12 \end{array}\right.$ Phương trình trở thành:

$f(t)=\sqrt{(t-12)(t-5)}+\sqrt{(t+5)(t-5)}+\sqrt{(t+12)(t+5)}=12+17\sqrt{2}$

Suy ra $f(t)=f(-t)$, do đó f(t) là hàm số chẵn trên tập $D=(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$ nên chỉ cần xét trên $[12;+\infty)$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Ta có $f'(t)=\frac{2t-17}{2\sqrt{(t-12)(t-5)}}+\frac{t}{\sqrt{(t+5)(t-5)}}+\frac{2t+17}{2\sqrt{(t+12)(t+5)}}>0$

với mọi giá trị $t\in[12;+\infty)$

Suy ra f(t) đồng biến trên $[12;+\infty)$, nên $f(t)=12+17\sqrt{2}$ có nhiều nhất một nghiệm thuộc $[12;+\infty)$

Mà $f(13)=12+17\sqrt{2}$, suy ra t =13 là nghiệm duy nhất của phương trình trên $[12;+\infty)$

Do f(t) là hàm số chẵn nên t = -13 là nghiệm duy nhất thuộc $(-\infty;-12]$.

- Vậy nghiệm của phương trình là $x=1;\ x=-25$

Bài 75: Giải phương trình: $2x^2-6x-5(x-2)\sqrt{x+1}+10=0$

Bài giải:

Điều kiện $x\ge -1$. Phương trình đã cho tương đương với

$-5(x-2)\sqrt{x+1}+2(x+1)+2(x^2-4x+4)=0\Leftrightarrow 2(x-2)^2-4(x-2)\sqrt{x+1}-(x-2)\sqrt{x+1}+2(\sqrt{x+1})^2$

$\Leftrightarrow 2(x-2)\left[(x-2)-2\sqrt{x+1}\right]-\sqrt{x+1}\left[(x-2)-2\sqrt{x+1}\right]=0\Leftrightarrow\left[(x-2)-2\sqrt{x+1}\right]\left[2(x-2)-\sqrt{x+1}\right]$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=2\sqrt{x+1}\\2x-4=\sqrt{x+1}\end{array}\right.$

Xét $2\sqrt{x+1}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x^2-8x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=8$



Xét $\sqrt{x+1}=2x-4 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ 4x^2-17x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$

Vậy nghiệm của phương trình là x =3, x = 8

Chú ý: Có thể giải cách khác bằng cách đặt $t=\sqrt{x+1}$, từ đó phương trình đã cho được biến đổi thành $(t-2)(t-3)(2t^2+5t+3)=0$

Bài 76: Giải phương trình $2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x-4}$

Bài giải:

Phương trình đã cho được viết thành

$$2x^2-11x+21=3\left(\sqrt[3]{4x-4}-2\right)+6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-11x+15=3\left(\sqrt[3]{4x-4}-2\right) \Leftrightarrow (x-3)(2x-5)=\frac{12(x-3)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}$$

Xét phương trình $2x-5=\dfrac{12}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}$ (*)

Tam thức $2x^2-11x+21$ có $\Delta=11^2-8.21=-47<0$ nên $2x^2-11x+21>0\ \forall x\in R$. Suy ra $4x-4>0 \Leftrightarrow x>1$.

Đặt $t=\sqrt[3]{4x-4},\ t>0;\ f(t)=\dfrac{12}{t^2+2t+4}$

Ta có $f'(t)=\dfrac{-12(2t+2)}{(t^2+2t+4)^2}<0$, với t > 0. Suy ra f(t) nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ do đó hàm số:

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$G(x)=\dfrac{12}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ Hàm số y = 2x – 5 đồng biến trên $(1;+\infty)$ Từ đó suy ra phương trình (*) có không quá một nghiệm trên khoảng $(1;+\infty)$
Mặt khác G(3) = y(3). Vậy phương trình (*) có duy nhất một nghiệm x = 3 trên khoảng $(1;+\infty)$. Tóm lại phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = 3.
Cách khác: Từ $2x^2-11x+21>0$ suy ra $4x-4>0$ Ta có $2x^2-11x+21=2(x-3)^2+x+3\ge x+3,\ \forall x\in R$. $(4x-4)+8+8\ge 3\sqrt[3]{(4x-4).8.8}=12\sqrt[3]{4x-4}\Leftrightarrow x+3\ge 3\sqrt[3]{4x-4}$ Suy ra $2x^2-11x+21\ge 3\sqrt[3]{4x-4}$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x-3=0\\4x-4=8\end{cases}\Leftrightarrow x=3$ • Vậy nghiệm của phương trình là x = 3.

Bài 77: Giải phương trình $\sqrt{4-x^2}+2\sqrt[3]{x^4-4x^3+4x^2}=(x-1)^2+1-|x|$

Bài giải:

*) Điều kiện: $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow -2\le x\le 2$

Phương trình đã cho tương đương với

$$|x|+\sqrt{4-x^2}=x^2-2x-2\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}+2 \qquad (1)$$

Ta có $\left(|x|+\sqrt{4-x^2}\right)^2=4+2|x|\sqrt{4-x^2}\ge 4$, với mọi $x\in[-2;2]$



Suy ra $\|x\|+\sqrt{4-x^2}\ge 2$, với mọi $x\in[-2;2]$ (2) Dấu đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi $x=0; x=\pm 2$ Đặt $\sqrt[3]{x^2-2x}=t$. Dễ dàng ta có được $t\in[-1;2]$, với mọi $x\in[-2;2]$ Khi đó vế phải của (1) chính là $f(t)=t^3-2t^2+2,\ t\in[-1;2]$
Ta có $f'(t)=3t^2-4t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{4}{3}\end{array}\right.$ Hơn nữa, ta lại có $f(-1)=-1, f(0)=2, f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{22}{27}, f(2)=2$ Suy ra $f(t)\le 2$, với mọi $t\in[-1;2]$ Do đó $x^2-2x-2\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}+2\le 2$, Với mọi $x\in[-2;2]$ (3) Dấu đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi $x=0; x=\pm 2$ Từ (2) và (3) ta có nghiệm của phương trình (1) là $x=0; x=\pm 2$ • Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=0; x=\pm 2$

Bài 78: Giải phương trình: $2x^2-9x+8=2\sqrt{x-1}$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x\ge 1$ $(*)$

$$(1)\Leftrightarrow 2(x-2)^2=\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x-1}=\sqrt{2}x-2\sqrt{2}-1 \\ \sqrt{x-1}=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}-1\end{array}\right.$$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$$\sqrt{x-1}=\sqrt{2}x-2\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-\left(9+2\sqrt{2}\right)x+10+4\sqrt{2}=0 \\ \sqrt{2}x-2\sqrt{2}-1>0 \end{cases}$$

Phương trình bậc hai $2x^2-\left(9+2\sqrt{2}x\right)+10+4\sqrt{2}=0$ có $\Delta=\left(2\sqrt{2}+1\right)^2$ nên có hai nghiệm là $x_1=\dfrac{5+2\sqrt{2}}{2}$ và $x_2=2$. Nghiệm x_2 bị loại vì $\sqrt{2}x_2-2\sqrt{2}-1<0$

Hoàn toàn tương tự ta có $\sqrt{x-1}=-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}-1 \Leftrightarrow x=\dfrac{5-2\sqrt{2}}{2}$

- Vậy phương trình có nghiệm $x=\left\{\dfrac{5-2\sqrt{2}}{2};2\right\}$.

Bài 79: Giải phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2x^2-5x-1$

Bài giải:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x-2}-1+\sqrt{4-x}-1=2x^2-5x-3$$

$$\frac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+\frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}=(x-3)(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\frac{1}{\sqrt{4-x}+1}-2x-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{4-x}+1}=2x+1 \quad (2) \end{array}\right.$$

* $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

*Xét phương trình (2)

ĐK $2\le x\le 4$

$VP\ge 5$



VT đạt giá trị lớn nhất trên đoạn *[2;4]* bằng $1-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ khi *x=2* nên phương trình (2) vô nghiệm

• Vậy phương trình có nghiệm duy nhất *x=3*



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

BẤT PHƯƠNG TRÌNH

Bài 1: Giải bất phương trình: $\sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{x+3}}+x^2\le\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}}+1$

Bài giải:

Điều kiện $x>-3$. Bất pt đã cho tương đương với

$$\sqrt{\frac{x^2+x+2}{x+3}}-\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}+x^2-1\le 0\Leftrightarrow\frac{\dfrac{x^2+x+2}{x+3}-\dfrac{4}{x^2+3}}{\sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{x+3}}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}}}+x^2-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{\dfrac{(x^2-1)(x^2+x+6)}{(x+3)(x^2+3)}}{\sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{x+3}}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}}}+x^2-1\le 0$$

$$\Leftrightarrow(x^2-1)\left[\frac{x^2+x+6}{(x+3)(x^2+3)\left(\sqrt{\dfrac{x^2+x+2}{x+3}}+\dfrac{2}{\sqrt{x^2+3}}\right)}+1\right]\le 0$$

$\Leftrightarrow x^2-1\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 1$ (Với $x>-3$ thì biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương).

- Vậy tập nghiệm của bất pt là $S=[-1;1]$

Bài 2: Giải bất phương trình: $1+\sqrt{4x^2+20}\le x+\sqrt{4x^2+9}$.

Bài giải:

Bất phương trình đã cho tương đương với:

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$\sqrt{4x^2+9}-5+6-\sqrt{4x^2+20}+x-2\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2-16}{\sqrt{4x^2+9}+5}+\dfrac{16-4x^2}{6+\sqrt{4x^2+20}}+x-2\ge 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5}-\dfrac{4x+8}{6+\sqrt{4x^2+20}}+1\right)\ge 0$

Từ (1) suy ra $x-1\ge \sqrt{4x^2+20}-\sqrt{4x^2+9}>0 \Rightarrow x>1$. Do đó

$\dfrac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5}-\dfrac{4x+8}{6+\sqrt{4x^2+20}}+1=(4x+8).\dfrac{1+\sqrt{4x^2+20}-\sqrt{4x^2+9}}{\left(\sqrt{4x^2+9}+5\right)\left(6+\sqrt{4x^2+20}\right)}+1>0$

- Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 2$.

Bài 3: Giải bất phương trình $\sqrt{x+1}\ge \dfrac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$ trên tập hợp số thực.

Bài giải:

- ĐK: $x\ge -1, x\ne 13$

- Khi đó: $\sqrt{x+1}\ge \dfrac{x^2-x-2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}-3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+2\ge \dfrac{x^2-x-6}{\sqrt[3]{2x+1}-3}$

$$\Leftrightarrow 1\ge \dfrac{(x+2)\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{\sqrt[3]{2x+1}-3},(*)$$

- Nếu $\sqrt[3]{2x+1}-3>0 \Leftrightarrow x>13$ (1)

thì (*) $\Leftrightarrow (2x+1)+\sqrt[3]{2x+1}\ge (x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t)=t^3+t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)\ge f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}\ge \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3-x^2-x\le 0$$

Suy ra: $x\in\left(-\infty;\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[0;\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \xrightarrow{DK(1)} VN$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

- Nếu $\sqrt[3]{2x+1}-3<0 \Leftrightarrow -1 \le x < 13$ (2)

thì (2*) $\Leftrightarrow (2x+1)+\sqrt[3]{2x+1} \le (x+1)\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t)=t^3+t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (2*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \le f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \le \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 13 \\ (2x+1)^2 \le (x+1)^3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Suy ra: $x \in [-1;0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right) \xrightarrow{DK(2)} x \in [-1;0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$

- Vậy bất phương trình có nghiêm $S=[-1;0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$

Bài 4: Giải bất phương trình: $\dfrac{5x-13-\sqrt{57+10x-3x^2}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}} \ge x^2+2x+9 \quad (1)$

Bài giải:

Điều kiện $\begin{cases} -3 \le x \le \frac{19}{3} \\ x \ne 4 \end{cases} \quad (*)$

Với điều kiện $(*)$ bất phương trình (1) tương đương với:

$$\frac{\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}\right)\left(2\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x}\right)}{\sqrt{x+3}-\sqrt{19-3x}} \ge x^2+2x+9$$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+3}+\sqrt{19-3x} \ge x^2+2x+9$

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+3}-\frac{x+5}{3}\right)+\left(\sqrt{19-3x}-\frac{13-x}{3}\right)\ge x^2+x-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(-x^2-x+2\right)}{9\left(\sqrt{x+3}+\frac{x+5}{3}\right)}+\frac{-x^2-x+2}{9\left(\sqrt{19-3x}+\frac{13-x}{3}\right)}\ge x^2+x-2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+x-2\right)\left[\frac{2}{9\left(\sqrt{x+3}+\frac{x+5}{3}\right)}+\frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x}+\frac{13-x}{3}\right)}\right]\le 0 \qquad (2)$$

Vì $\frac{2}{9\left(\sqrt{x+3}+\frac{x+5}{3}\right)}+\frac{1}{9\left(\sqrt{19-3x}+\frac{13-x}{3}\right)}>0$ với mọi $x\in\left[-3;\frac{19}{3}\right]\setminus\{4\}$

Do đó $(2)\Leftrightarrow x^2+x-2\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 1$ (Thoả mãn)

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-2;1]$.

Bài 5: Giải bất phương trình $\left(x^2-x-6\right)\sqrt{x-1}+(x-2)\sqrt{x+1}\ge 3x^2-9x+2 \quad (1)$

Bài giải:

$$\left(x^2-x-6\right)\sqrt{x-1}+(x-2)\sqrt{x+1}\ge 3x^2-9x+2$$
$$\Leftrightarrow \left(x^2-x-6\right)\left(\sqrt{x-1}-1\right)+(x-2)\left(\sqrt{x+1}-2\right)\ge 2x^2-10x+12$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-x-6)(x-2)}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{(x-2)(x-3)}{\sqrt{x+1}+2}\ge 2x^2-10x+12$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-5x+6)(x+2)}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{(x^2-5x+6)}{\sqrt{x+1}+2}\ge 2(x^2-5x+6)$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5x+6)\left[\frac{x+2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}-2\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5x+6)\left[\frac{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x\in[1;2]\cup[3;+\infty)$$

- Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $S=[1;2]\cup[3;+\infty)$.

Bài 6: Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{3x^2-5}}\le\frac{2}{\sqrt{x^2-2}+1}$ trên tập số thực.

Bài giải:

+) Đặt t = x^2 – 2, bpt trở thành: $\frac{1}{\sqrt{t+3}}+\frac{1}{\sqrt{3t+1}}\le\frac{2}{\sqrt{t}+1}$ ĐK: t ≥ 0 với đk trên, bpt tương đương

$(\sqrt{t}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{t+3}}+\frac{1}{\sqrt{3t+1}}\right)\le 2$. Theo Cô-si ta có:

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+3}}=\sqrt{\frac{t}{t+1}.\frac{t+1}{t+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{t}{t+1}+\frac{t+1}{t+3}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{t+3}}=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2}{t+3}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{t+3}\right)$$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$$\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{2}.\frac{2t}{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{2t}{3t+1}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3t+1}}=\sqrt{\frac{1}{t+1}.\frac{t+1}{3t+1}}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}+\frac{t+1}{3t+1}\right)$$

$\Rightarrow VT\le 2\forall t\ge 0.$

+) Thay ẩn x được $x^2\ge 2$ $\Leftrightarrow x\in(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty)\Rightarrow T=(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};+\infty).$

- Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $T=\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right).$

Bài 7: Giải bất phương trình: $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}>\frac{x-1}{x}(1)$

Bài giải:

ĐK: x $\in$[-1; 0)$\cup$[1; +∞)

Lúc đó:VP của (1) không âm nên (1) chỉ có nghiệm khi:

$\sqrt{x-\frac{1}{x}}>\sqrt{1-\frac{1}{x}}\Rightarrow x-\frac{1}{x}>1-\frac{1}{x}\Rightarrow x>1$. Vậy (1) chỉ có nghiệm trên (1; +∞).

Trên (1; +∞): $(1)\Leftrightarrow\sqrt{x+1}-1>\sqrt{\frac{x-1}{x}}\Leftrightarrow\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}>1$.

Do $x+1-\frac{x-1}{x}=\frac{x^2+1}{x}>0$ khi x > 1 nên:

$$(1)\Leftrightarrow x+1+\frac{x-1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}>1\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+1>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x}-2\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}+1>0\Leftrightarrow(\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}-1)^2>0\Leftrightarrow x\ne\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

- Vậy nghiệm của bất phương trình là $\begin{cases} x>1 \\ x \neq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Bài 8: Giải bất phương trình $1+x\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2-x+1}(1+\sqrt{x^2-x+2})$

Bài giải:

Bất phương trình đã cho tương đương

$$(x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2})+(1-\sqrt{x^2-x+1})>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x^2-x+2)}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}}+\frac{x(1-x)}{1+\sqrt{x^2-x+1}}>0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(\frac{2x^2-x+2}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}}-\frac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}\right)>0$$

$\Leftrightarrow (x-1).A>0$ (1) với $A=\dfrac{2x^2-x+2}{x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}}-\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}$

Nếu $x\le 0$ thì $\begin{cases} \sqrt{x^2-x+1}\ge\sqrt{x^2+1} \\ \sqrt{x^2-x+2}>-x \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}\ge -x\sqrt{x^2+1}$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}+x\sqrt{x^2+1}>0 \Rightarrow A>0$$

Nếu x>0 , áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}\le \dfrac{x^2-x+1+x^2-x+2}{2}=x^2-x+\dfrac{3}{2} \\ x\sqrt{x^2+1}\le \dfrac{x^2+x^2+1}{2}=x^2+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-x+1}\sqrt{x^2-x+2}+x\sqrt{x^2+1}\le 2x^2-x+2$

$\Rightarrow A\ge 1-\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}>0$ vì $\dfrac{x}{1+\sqrt{x^2-x+1}}<1$

Tóm lại , với mọi $x\in\mathbb{R}$ ta có A>0. Do đó (1) tương đương $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(1;+\infty)$.

Chú ý : Cách 2. Phương pháp hàm số

Đặt $u=\sqrt{x^2-x+1}\Rightarrow u^2=x^2-x+1$ thế vào bpt đã cho ta có

$u^2-x^2+x+x\sqrt{x^2+1}>u(1+\sqrt{u^2+1})$

$\Leftrightarrow u^2-u-u\sqrt{u^2+1}>x^2-x-x\sqrt{x^2+1}$

Xét $f(t)=t^2-t-t\sqrt{t^2+1})$

$f'(t)=-(t-\sqrt{t^2+1})^2-\sqrt{t^2+1}<0\forall t$ nên hàm nghịch biến trên R

Do đó $bpt\Leftrightarrow u<x\Leftrightarrow x>1$

Bài 9: Giải bất phương trình:

$(x+2)(x-2\sqrt{2x+5})-9\le (x+2)(3\sqrt{x^2+5}-x^2-12)+\sqrt[3]{5x^2+7}\qquad (1)$

Bài giải:

Điều kiện xác định: $x\ge -\dfrac{5}{2}$. Khi đó ta có

$(1)\Leftrightarrow x^3+3x^2+14x+15-2(x+2)\sqrt{2x+5}-3(x+2)\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{5x^2+7}\le 0$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2-x-18-2(x+2)(\sqrt{2x+5}-3)-3(x+2)(\sqrt{x^2+5}-3)+3-\sqrt[3]{5x^2+7}\le 0$



$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+5x+9)-\frac{2(x+2)(2x-4)}{\sqrt{2x+5}+3}-\frac{3(x+2)(x^2-4)}{\sqrt{x^2+5}+3}+\frac{5(4-x^2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2+5x+9-\frac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3}-\frac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3}-\frac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}\right)\le 0(*)$$

Ta có với $x\ge -\frac{5}{2}\Rightarrow \begin{cases}\frac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3}\le\frac{4}{3}(x+2);\frac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3}<\frac{3}{5}(x+2)^2\\ \frac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}<\frac{5(x+2)}{9}\end{cases}$

$$\Rightarrow x^2+5x+9-\frac{4(x+2)}{\sqrt{2x+5}+3}-\frac{3(x+2)^2}{\sqrt{x^2+5}+3}-\frac{5(x+2)}{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^2}>$$

$$\frac{18x^2+57x+127}{45}>0,\forall x\ge -\frac{5}{2}$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow x-2\le 0\Leftrightarrow x\le 2$, kết hợp với điều kiện $x\ge -\frac{5}{2}$ suy ra: $-\frac{5}{2}\le x\le 2$

- Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left[-\frac{5}{2};2\right]$.

Bài 10: Giải bất phương trình $2x^2+\sqrt{x+2}+5\le\sqrt{2}\left(\sqrt{x+2}+x\right)\sqrt{x^2-x+3}+x\quad(1)$

Bài giải:

Điều kiện xác định: $x \geq -2$.

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sqrt{x+2}+x\right)\sqrt{x^2-x+3}-\left(\sqrt{x+2}+x\right) \geq 2x^2-2x+5$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+x\right)\left(\sqrt{2x^2-2x+6}-1\right) \geq 2x^2-2x+5$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+x\right)\left(2x^2-2x+6-1\right) \geq (2x^2-2x+5)\left(\sqrt{2x^2-2x+6}+1\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+x \geq \sqrt{2x^2-2x+6}+1$ (Do $2x^2-2x+5>0, \forall x \in R$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}+x-1 \geq \sqrt{2(x-1)^2+2(x+2)}$ (2)

Đặt $a=\sqrt{x+2}, b=x-1 (a \geq 0)$, (2) trở thành

$a+b \geq \sqrt{2a^2+2b^2} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ (a+b)^2 \geq 2a^2+2b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b \geq 0 \\ (a-b)^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b \geq 0$

Do đó ta có $\sqrt{x+2}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

- Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $x=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Bài 11: Giải bất phương trình $\sqrt{x}(x+1) \geq x^3-5x^2+8x-6 \quad (x \in \mathbb{R})$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: x ≥ 0.

$(1) \Leftrightarrow x\sqrt{x}+x \geq (x^3-6x^2+12x-8)+(x^2-4x+4)-2$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^3+x+\sqrt{x} \geq (x-2)^3+(x-2)^2+(x-2)$ (2)



Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + t$, có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 1 > 0, \forall t$.

Do đó hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên R, mặt khác (2) có dạng

$f\left(\sqrt{x}\right) \ge f\left(x-2\right) \Leftrightarrow \sqrt{x} \ge x-2$ (3).

+) Với $0 \le x \le 2$ là nghiệm của (3).

+) Với x > 2, bình phương hai vế (3) ta được $x^2 - 5x + 4 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 4$

Kết hợp nghiệm ta được $2 < x \le 4$ là nghiệm của (3).

- Vậy nghiệm của (3) là $0 \le x \le 4$, cũng là nghiệm của bất phương trình (1).

Bài 12: Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \le 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge -1$.

Bpt (1) tương đương: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \le \left(\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}\right)^2 - 20$

Đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$, t >0

Bpt trở thành: $t^2 - t - 20 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 5 \\ t \le -4 \end{array}\right.$. Đối chiếu đk được $t \ge 5$.

Với $t \ge 5$, ta có: $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \ge 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+5x+3} \ge -3x + 21$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -3x + 21 < 0 \\ 2x^2 + 5x + 3 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -3x + 21 \ge 0 \\ x^2 - 146x + 429 \le 0 \end{cases} \end{array}\right.$$



$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 7 \\ 3 \le x \le 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 3$

Kết hợp với điều kiện $x \ge -1$ suy ra $x \in [3;+\infty)$

- Vậy bất phương trình có nghiệm $S = [3;+\infty)$.

Bài 13: Giải bất phương trình $\sqrt{x+1} \ge \dfrac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}$ trên tập hợp số thực.

Bài giải:

– ĐK: $x \ge -1, x \ne 13$. Khi đó:

$$\sqrt{x+1} \ge \frac{x^2 - x - 2\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} + 2 \ge \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt[3]{2x+1} - 3} \Leftrightarrow 1 \ge \frac{(x+2)\left(\sqrt{x+1} - 2\right)}{\sqrt[3]{2x+1} - 3}, (*)$$

– Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 13$ (1) thì (*) $\Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \ge (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (*):

$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \ge f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \ge \sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - x \le 0$$

Suy ra: $x \in \left(-\infty; \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[0; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \xrightarrow{DK(1)} \text{VN}$

– Nếu $\sqrt[3]{2x+1} - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 \le x < 13$ (2)

thì (2*) $\Leftrightarrow (2x+1) + \sqrt[3]{2x+1} \le (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}$

Do hàm $f(t) = t^3 + t$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, mà (2*):



$$f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \le f\left(\sqrt{x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1} \le \sqrt{x+1} \Leftrightarrow -1 \le x \le -\frac{1}{2} \vee \begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 13 \\ (2x+1)^2 \le (x+1)^3 \end{cases}$$

Suy ra: $x \in [-1;0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};+\infty\right) \xrightarrow{DK(2)} x \in [-1;0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$

- Vậy bất phương trình có nghiệm $x \in [-1;0] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};13\right)$

Bài 15: Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}} \ge 1$

Bài giải:

Điều kiện $\begin{cases} x(x+2) \ge 0 \\ x \ge 0 \\ (x+1)^3 \ge 0 \\ \sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 0;\quad \text{x} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x} > 0$

Do vậy

$$\frac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}} \ge 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(x+2)} \ge \sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x \ge x^3+3x^2+4x+1-2(x+1)\sqrt{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{x(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow (x+1)\left[x^2+x+1-2\sqrt{x(x+1)}\right] \le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+1-2\sqrt{x(x+1)} \le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x(x+1)}-1\right)^2 \le 0$$



$$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)}=1$$

$$\Leftrightarrow x(x+1)=1 \Leftrightarrow x^2+x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện *x>0* ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Bài 16: Giải bất phương trình: $\left(4x^2-x-7\right)\sqrt{x+2}>10+4x-8x^2$

Bài giải:

Điều kiện: $x\ge -2$

Bất phương trình đã cho tương đương với bất phương trình

$$\left(4x^2-x-7\right)\sqrt{x+2}+2\left(4x^2-x-7\right)>2\left[(x+2)-4\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(4x^2-x-7\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)>2\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-x-7>2\sqrt{x+2}-4 \Leftrightarrow 4x^2>x+2+2\sqrt{x+2}+1$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2>\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+2}+1-2x\right)\left(\sqrt{x+2}+1+2x\right)<0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{x+2}<2x-1 & (1) \\ \sqrt{x+2}<-2x-1 & (2) \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} \sqrt{x+2}<2x-1 & (3) \\ \sqrt{x+2}<-2x-1 & (4) \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

- Giải hệ (I): Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} x\ge 2 \\ 2x-1<-2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le x<0$



Khi đó hệ (I) tương đương với hệ phương trình $\begin{cases} -2 \le x < 0 \\ \sqrt{x+2} < -2x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} -2 \le x < -\frac{1}{2} \\ x+2 < (-2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2;-1]$
• Giải hệ (II): Từ (3) và (4) suy ra $\begin{cases} x \ge -2 \\ -2x-1 < 2x-1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$ Khi đó hệ (I) tương đương với hệ phương trình $\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x+2} < 2x-1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x+2 < (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5+\sqrt{41}}{8};+\infty\right)$
• Vậy tập nghiệm của bất pt là $T = [-2;-1) \cup \left(\frac{5+\sqrt{41}}{8};+\infty\right)$

Bài 17: Giải bất phương trình: $4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x+3} \le (x-1)(x^2-2)$ (1)

Bài giải:

Điều kiện: $x \ge -1$ Nhận thấy x = - 1 là một nghiệm cuả bất phương trình   Xét x > -1. Khi đó bất phương trình đã cho tương đương với $4\left(\sqrt{x+1}-2\right) + 2\left(\sqrt{2x+3}-3\right) \le x^3 - x^2 - 2x - 12$



$$\Leftrightarrow \frac{4(x-3)}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{4(x-3)}{\sqrt{2x+3}+3} \le (x-3)(x^2+2x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{4}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{4}{\sqrt{2x+3}+3}-(x+1)^2-3\right) \le 0. \quad (1)$$

Vì x > -1 nên $\sqrt{x+1}>0$ và $\sqrt{2x+3}>1$. Suy ra $\frac{4}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{4}{\sqrt{2x+3}+3}<3$, vì vậy

$$\frac{4}{\sqrt{x+1}+2}+\frac{4}{\sqrt{2x+3}+3}-(x+1)^2-3<0.$$

Do đó bất phương trình (1) $\Leftrightarrow x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 3$

- Vậy nghiệm của bất phương trình là x = -1 và $x\ge 3$.

Bài 18: Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x^2-3x+1}\ge x-1$

Bài giải:

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} x\le \frac{1}{2} \\ x\ge 2 \\ x=1 \end{array}\right.$

X = 1 là một nghiệm

Trường hợp 1: $x\le \frac{1}{2}$

BPT $\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}\ge \sqrt{1-2x}$

$\Leftrightarrow 3-2x+2\sqrt{(2-x)(1-x)}\ge 1-2x$



BPT $\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(1-x)} > -2$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: $x \geq 2$

BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x-2} - \sqrt{2x-1} \geq \sqrt{x-1}$

$\sqrt{x-2} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1}$

$\Leftrightarrow x-2 \geq 3x-2+2\sqrt{2x^2-3x+1}$

$\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{2x^2-3x+1} \leq 0$ (vô nghiệm)

Vậy tập nghiệm của BPT là; $S = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$

Bài 19: Giải bất phương trình $\frac{1}{log_3\sqrt{2x^2-3x+1}} < \frac{1}{log_3(x+1)}$

Bài giải:

Đk;

$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 > 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 \neq 0 \\ x+1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \end{cases} hay\ x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)\{0\} \cup (1; +\infty) \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Với điều kiện trên và để ý rằng $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} > 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > \frac{3}{2} \end{array}\right.$,

$x + 1 > 1 \Leftrightarrow x > 0$ từ đó có thể chia bài toán thành 3 trường hợp sau:

TH1: Với $-1 < x < 0, thì\ 0 < x+1 < 1 \Rightarrow log_3(x+1) < 0\ và\ \sqrt{2x^2-3x+1} >$

$\Leftrightarrow log_3\sqrt{2x^2-3x+1} > 0 \Rightarrow$ bất phương trình đã cho vô nghiệm



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

TH2: với $0<x<\frac{1}{2}\vee 1<x<\frac{3}{2}$. thì

$x+1>1\Rightarrow log_3(x+1)>0\, va`\, 0<\sqrt{2x^2-3x+1}<1\Leftrightarrow log_3\sqrt{2x^2-3x+1}<0$

$\Rightarrow$ bất phương trình đã cho trở thành một bất đẳng thức đúng.

TH3: với $x>\frac{3}{2}, thi`\, x+1>1\Rightarrow log_3\left(x+1\right)>0$

Và $\sqrt{2x^2-3x+1}>1\Leftrightarrow log_3\sqrt{2x^2-3x+1}>0.$

Từ đó với $x>\frac{3}{2}$. bất phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} log_3\left(x+1\right)<log_3\sqrt{2x^2-3x+1} \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \sqrt{2x^2-3x+1}>x+1 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2-3x+1>\left(x+1\right)^2 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2-5x>0 \\ x>\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow x=5$$

Kêt hợp cả 3 trường hợp bât phương trình đã cho có tập nghiệm:

$$S=\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup\left(5;+\infty\right)$$

Bài 20: Giải bất phương trình: $3(x^2-2)+\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}>\sqrt{x}\left(\sqrt{x-1}+3\sqrt{x^2-1}\right)$.

Bài giải:

ĐK: $x\geq 1$.

Với điều kiện đó

BPT $\Leftrightarrow 6(x^2-2)+\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}-2\sqrt{x^2-x}-6\sqrt{x}\sqrt{x^2-1}>0$

$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2+2\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}+x^2-x-5\right)>0$

Xét hàm số $f(t)=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{t+1}}+t-5$ với $t\ge 0$. Ta có $f'(t)=1-\frac{2\sqrt{2}}{(t+1)\sqrt{t+1}}$.

- $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$
- Bảng xét dấu

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

Suy ra $f(t)\ge f(1),\forall t\in[0;+\infty)\Rightarrow f(t)\ge 0,\forall t\in[0;+\infty)$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=1$.

Do $x^2-x\ge 0,\forall x\in[0;+\infty)\Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}+x^2-x-5\ge 0,\forall x\in[0;+\infty)$.

Dấu "=" xảy ra khi $x^2-x=1\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó: $3\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-x}-1\right)^2+2\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}+x^2-x-5\right)>0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x}\ne 0\\ \sqrt{x^2-x}-1\ne 0\\ \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+1}}+x^2-x-5\ne 0\end{array}\right.\Leftrightarrow x\ne\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=[1;+\infty)\setminus\left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Bài 21: Giải bất phương trình $x^2+5x<4\left(1+\sqrt{x^3+2x^2-4x}\right)$.

Bài giải:

Điều kiện: $x^3+3x^2-4x\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1-\sqrt{5}\le x\le 0\\ x\ge -1+\sqrt{5}\end{array}\right.$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow 4\sqrt{x\left(x^2+2x-4\right)}>x^2+5x-4$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{x\left(x^2+2x-4\right)}>3x+x^2+2x-4$ (2)

Trường hợp 1: với $x\ge -1+\sqrt{5}$ thì (2) $\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}>3+\frac{x^2+2x-4}{x}$ (3)

Đặt $t=\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}$ $(t\ge 0)$ thì (3) trở thành: $t^2-4t+3<0\Leftrightarrow 1<t<3$

Suy ra $1<\sqrt{\frac{x^2+2x-4}{x}}<3\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-4>0\\ x^2-7x-4<0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{-1+\sqrt{17}}{2}<x<\frac{7+\sqrt{65}}{2}$

Trường hợp 2: với $-1-\sqrt{5}\le x\le 0$ thì $x^2+5x-4<0$ nên (2) luôn thỏa

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là:

$$S=\left[-1-\sqrt{5};0\right]\cup\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{65}}{2}\right)$$

Bài 22: Giải bất phương trình $3(x^2-1)\sqrt{2x+1}<2(x^3-x^2)$.

Bài giải:

*) Điều kiện: $x\ge -\frac{1}{2}$.

Bất phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-1)\left[2x^2-3(x+1)\sqrt{2x+1}\right]>0\Leftrightarrow(x-1)\left[2(x+1)^2-3(x+1)\sqrt{2x+1}-2(2x+1)\right]>0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)\left(x+1-2\sqrt{2x+1}\right)\left[2(x+1)+\sqrt{2x+1}\right]>0\Leftrightarrow(x-1)\left(x+1-2\sqrt{2x+1}\right)>0 \text{ (1)}$$

Do $2(x+1)+\sqrt{2x+1}>0$, với mọi $x\ge -\frac{1}{2}$.

Xét hai trường hợp sau:

+) x > 1. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x+1-\sqrt{2x+1}>0\Leftrightarrow x^2-6x-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<3-2\sqrt{3}\\x>3+2\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm $x>3+2\sqrt{3}$.

+) $-\frac{1}{2}\le x<1$. Khi đó

$(1)\Leftrightarrow x+1-2\sqrt{2x+1}<0\Leftrightarrow x^2-6x-3<0\Leftrightarrow 3-2\sqrt{3}<x<3+2\sqrt{3}$.

Đối chiếu điều kiện ta được nghiệm $3-2\sqrt{3}<x<1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $3-2\sqrt{3}<x<1$ và $x>3+2\sqrt{3}$.

Bài 23: Giải bất phương trình $1+\sqrt{x-1}\left(\sqrt{2x}-3\sqrt{x-1}\right)^3\geq 0$.

Bài giải:

Điều kiện: $x\geq 1$.

Đặt $a=\sqrt{x-1},b=\sqrt{2x}$, khi đó $a\geq 0,b\geq\sqrt{2}$ và $b^2-2a^2=2$.

Bất phương trình trở thành:

$$1+a(b-3a)^3\geq 0\Leftrightarrow\left(\frac{b^2-2a^2}{2}\right)^2+a(b-3a)^3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow(b^2-2a^2)^2+4a(b-3a)^3\geq 0\Leftrightarrow\left(1-2\frac{a^2}{b^2}\right)^2+4\frac{a}{b}(1-3\frac{a}{b})^3\geq 0$$

Đặt $t=\dfrac{a}{b},t\geq 0$, bất phương trình trở thành $(1-2t^2)^2+4t(1-3t)^3\geq 0$.

$\Leftrightarrow 104t^4-108t^3+40t^2-4t-1\leq 0$

$\Leftrightarrow(2t-1)(52t^3-28t^2+6t+1)\leq 0$

$\Leftrightarrow(2t-1)(t(52t^2-28t+6)+1)\leq 0$

$\Leftrightarrow 2t-1\leq 0$, vì $t\geq 0$ và $52t^2-28t+6>0$.

Suy ra $\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x}}\leq\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}\leq\sqrt{2x}\Leftrightarrow 4(x-1)\leq 2x\Leftrightarrow x\leq 2.$

Kết hợp điều kiện, suy ra nghiệm của bất phương trình là $1\leq x\leq 2$.

QStudy.vn

Tất cả vì học sinh thân yêu



THẦY QUANG BABY

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bài 24: Giải phương trình: $\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}\ge 2-x^2$.

Bài giải:

ĐK: $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$.Khi đó $2-x^2>0$

Bpt$\Leftrightarrow 2+2\sqrt{1-4x^2}\ge 4-4x^2+x^4 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-4x^2}\ge 2-4x^2+x^4$ (1).

Vì $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$ nên $2-4x^2>0\Rightarrow 2-4x^2+x^4>0$

$(1)\Leftrightarrow 4(1-4x^2)\ge(2-4x^2+x^4)^2$

$\Leftrightarrow 4-16x^2\ge 4+16x^4+x^8-16x^2+4x^4-8x^6$

$\Leftrightarrow x^8-8x^6+20x^4\le 0\Leftrightarrow x^4(x^4-8x^2+20)\le 0\Leftrightarrow x=0$

- Vậy pt có nghiệm duy nhất x = 0

Bài 25: Giải bất phương trình: $\sqrt{x}+\sqrt{1-x^2}\ge\sqrt{2-3x-4x^2}$

Bài giải:

Điều kiện $\begin{cases} x\ge 0\\ 1-x^2\ge 0\\ 2-3x-4x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 0\le x\le 1\\ \frac{-3-\sqrt{41}}{8}\le x\le\frac{-3+\sqrt{41}}{8}\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$ (*)

Bất phương trình đã cho tương đương với

$x+1-x^2+2\sqrt{x(1-x^2)}\ge 2-3x-4x^2\Leftrightarrow 3(x^2+x)-(1-x)+2\sqrt{(x+x^2)(1-x)}\ge 0$

$\left[x\ge\frac{-5+\sqrt{34}}{\ldots}\right.$



Kết hợp điều kiện (*), ta suy ra nghiệm của bất phương trình là $\frac{-5+\sqrt{34}}{9}$ $x \le \frac{-3+\sqrt{41}}{8}$

Bài 26: Giải phương trình: $\frac{x^2}{\left(x+1-\sqrt{x+1}\right)^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}$ (1)

Bài giải:

Đặt $t=\sqrt{x+1}$. ĐK: $t>0$ và $t \ne 1$. Bất phương trình đã cho trở thành:

$$\frac{\left(t^2-1\right)^2}{\left(t^2-t\right)^2} < \frac{\left(t^2-1\right)^2+3t^2+15}{t^4}$$

$$\Leftrightarrow t^2(t+1)^2 < t^4+t^2+15 \Leftrightarrow t^3 < 8 \Leftrightarrow t < 2$$

Kết hợp với ĐK ban đầu ta được:

$$\begin{cases} t \ne 1 \\ 0 < t < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \ne 1 \\ 0 < \sqrt{x+1} < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ne 0 \\ 0 < x+1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 0 \\ -1 < x < 3 \end{cases}$$

- Vậy bất phương trình có tập nghiệm $S=(-1;3)\setminus\{0\}$

Bài 27: Giải bất phương trình $\left(\sqrt{x+4}-1\right)\sqrt{x+2} \ge \frac{x^3+4x^2+3x-2(x+3)\sqrt[3]{2x+3}}{\left(\sqrt[3]{2x+3}-3\right)\left(\sqrt{x+4}+1\right)}$ (1)

Bài giải:

ĐK: $x \ge 2, x \ne 12$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}+2\geq\frac{(x+3)\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{\sqrt[3]{2x+3}-3}\Leftrightarrow 1\geq\frac{(x+3)\left(\sqrt{x+2}-2\right)}{\sqrt[3]{2x+3}-3}\ (2)$
TH1: $x>12$ $(2)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2x+3}\right)^2+\sqrt[3]{2x+3}\geq\left(\sqrt{x+2}\right)^3+\sqrt{x+2}\ (3)$ Hàm số $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên R nên: $(3)\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x+3}\geq\sqrt{x+2}\Leftrightarrow(2x+3)^2\geq(x+2)^3$ $\Leftrightarrow x^3+2x^2-1\leq 0$ vô nghiệm vì $x>12$
TH2: $-2\leq x<12$ $(2)\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2x+3}\right)^3+\sqrt[3]{2x+3}\leq\left(\sqrt{x+2}\right)^3+\sqrt{x+2}\ (4)$ Hàm số $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên R nên: $(4)\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x+3}\leq\sqrt{x+2}\Leftrightarrow(2x+3)^2\leq(x+2)^3$ $\Leftrightarrow x^3+2x^2-1\geq 0\Leftrightarrow(x+1)\left(x^2+x-1\right)\geq 0$ $\Leftrightarrow x\in\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};12\right)$
Đối chiếu điều kiện $-2\leq x<12$ ta có tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2};-1\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};12\right)$

Bài 28: Giải bất phương trình: $\sqrt{9x^2+3}+9x-1\geq\sqrt{9x^2+15}$

Bài giải:

Nhận xét: $9x-1\geq\sqrt{9x^2+15}-\sqrt{9x^2+3}>0\Rightarrow x>\frac{1}{9}$ $bpt\Leftrightarrow\left(\sqrt{9x^2+3}-2\right)+3(3x-1)\geq\sqrt{9x^2+15}-4$
$\Leftrightarrow\frac{9x^2-1}{\sqrt{9x^2+3}+2}+3(3x-1)-\frac{9x^2-1}{\sqrt{9x^2+15}+4}\geq 0$



$(3x-1)\left[\dfrac{3x+1}{\sqrt{9x^2+3}+2}-\dfrac{3x+1}{\sqrt{9x^2+15}+4}+3\right]\ge 0$ $(3x-1)\left[(3x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+3}+2}-\dfrac{1}{\sqrt{9x^2+15}+4}\right)+3\right]\ge 0\Rightarrow 3x-1\ge 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{1}{3}$
Kết hợp các ĐK suy ra nghiệm của BPT là $x\ge\dfrac{1}{3}$ là nghiệm của bpt

Bài 29: Giải bất phương trình: $\sqrt{x}\ge\dfrac{x^4-2x^3+2x-1}{x^3-2x^2+2x}$ $\left(x\in\mathbb{R}\right)$

Bài giải:

ĐK: $x>0$, BPT tương đương: $\sqrt{x}\ge\dfrac{(x+1)(x-1)^3}{x\left[(x-1)^2+1\right]}\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{x+1}\ge\dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^2+1}(1)$
Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^3}{t^2+1}$ trên $\mathbb{R}$
Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^4+3t^2}{\left(t^2+1\right)^2}\ge 0\forall t\in\mathbb{R}$ Mà f(t) liên tục trên $\mathbb{R}$ nên f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.
(1) có dạng: $f\left(\sqrt{x}\right)\ge f(x-1)\Leftrightarrow\sqrt{x}\ge x-1\Leftrightarrow 0<x\le\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Bài 30: Giải bất phương trình $1+\sqrt{4x^2+20}\le x+\sqrt{4x^2+9}$ (1)

Bài giải:

Bất phương trình đã cho tương đương với: $\sqrt{4x^2+9}-5+6-\sqrt{4x^2+20}+x-2\ge 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2-16}{\sqrt{4x^2+9}+5}+\frac{16-4x^2}{6+\sqrt{4x^2+20}}+x-2\ge 0$
$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5}-\frac{4x+8}{6+\sqrt{4x^2+20}}+1\right)\ge 0$
Từ (1) suy ra $x-1\ge\sqrt{4x^2+20}-\sqrt{4x^2+9}>0\Rightarrow x>1$. Do đó $\frac{4x+8}{\sqrt{4x^2+9}+5}-\frac{4x+8}{6+\sqrt{4x^2+20}}+1=(4x+8).\frac{1+\sqrt{4x^2+20}-\sqrt{4x^2+9}}{\left(\sqrt{4x^2+9}+5\right)\left(6+\sqrt{4x^2+20}\right)}+1>0$
• Vậy nghiệm của bất phương trình là $x\ge 2$

Bài 32: Giải bất phương trình: $\frac{x^2-5x+14}{2+3\sqrt[3]{x^2-x+1}}<\frac{2}{x}$

Bài giải:

Đkxđ: $x\ne 0$

Ta có: $\begin{cases} x^2-5x+14>0 \\ 2+3\sqrt[3]{x^2-x+1}>0 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{x^2-5x+14>0}{2+3\sqrt[3]{x^2-x+1}}>0\Rightarrow \frac{2}{x}>\frac{x^2-5x+14>0}{2+3\sqrt[3]{x^2-x+1}}>0$

$\Rightarrow x>0$ quy đồng ta có:

$x^3-5x^2+14x<4+6\sqrt[3]{x^2-x+1} \Leftrightarrow x^3-5x^2+8x-4+6\left(x-\sqrt[3]{x^2-x+1}\right)<0$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2-4x+4)+6\frac{(x^3-x^2+x-1)}{x^2+x\sqrt[3]{x^2-x+1}+\left(\sqrt[3]{x^2-x+1}\right)^2}<0$$

$$x^2+x\sqrt[3]{x^2-x+1}+\left(\sqrt[3]{x^2-x+1}\right)^2=A$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x-2)^2+\frac{6(x^2+1)}{A}\right]<0 \Leftrightarrow x<0+1 \text{ (Do } (x-2)^2+\frac{6(x^2+1)}{A}>0\forall x>0\text{)}$$

Kết luận $x<0+1 \Rightarrow x<1$

- Vậy $x\in(0;1)$

Bài 33: Giải bất phương trình: $\log_2\left(x^2-\frac{x+1}{x-1}\right)\geq \log_{\sqrt{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\sqrt{2x+1}\right)+1 \qquad (1)$

Giải bất phương trình $\log_2(x^2-\frac{x+1}{x-1})\geq \log_{\sqrt{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(1+\sqrt{2x+1})+1$

Điều kiện : $\begin{cases} x^2-\dfrac{x+1}{x-1}>0 \\ x>0 \end{cases}$

BPT $\Leftrightarrow x^2-\dfrac{x+1}{x-1}\geq \dfrac{2x^2}{1+\sqrt{2x+1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^3-x^2-x-1)(1+\sqrt{2x+1})}{x-1} \geq 2x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+1)(x^2-2x-1)}{x-1} \geq \frac{(x^3-x^2-x-1)(x-\sqrt{2x+1})}{x-1}$$

$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{2x+1})\left(\frac{(x^2+1)(x+\sqrt{2x+1})-(x^3-x^2-x-1)}{x-1}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-\sqrt{2x+1})\left(\frac{(x^2+1)\sqrt{2x+1}+x^2+2x+1}{x-1}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-\sqrt{2x+1}}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq \sqrt{2x+1} \\ x > 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq \sqrt{2x+1} \\ x < 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 1+\sqrt{2} \\ \frac{-1}{2} \leq x < 1 \end{array}\right.$$

- Vậy $\left[\begin{array}{l} x \geq 1+\sqrt{2} \\ 0 < x < 1 \end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Bài 34: Giải bất phương trình $x^2+5x < 4\left(1+\sqrt{x^3+2x^2-4x}\right)$

Bài giải:



Điều kiện: $x^3+2x^2-4x\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge -1+\sqrt{5} \\ -1-\sqrt{5}\le x\le 0\end{array}\right.$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\left(x^2+2x-4\right)+3x<4\sqrt{x\left(x^2+2x-4\right)}$ (1)

Xét hai trường hợp sau đây:

TH1: Với $-1-\sqrt{5}\le x\le 0$ khi đó $x^2+2x-4\le 0$ và $3x\le 0$. Hơn nữa hai biểu thức x^2+2x-4 và $3x$ không đồng thời bằng 0. Vì vậy

$$\left(x^2+2x-4\right)+3x\le 4\sqrt{x\left(x^2+2x-4\right)}$$

Suy ra $-1-\sqrt{5}\le x\le 0$ thỏa mãn bất phương trình đã cho

TH2: Với $x\ge -1+\sqrt{5}$ khi đó $x^2+2x-4\ge 0$. Đặt $\sqrt{x^2+2x-4}=a\ge 0,\sqrt{x}=b>0$

Bất phương trình trở thành $a^2+3b^2<4ab \Leftrightarrow (a-b)(a-3b)<0 \Leftrightarrow b<a<3b$

$\sqrt{x}<\sqrt{x^2+2x-4}<3\sqrt{x} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-4>0 \\ x^2-7x-4<0\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}<x<\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}$ (tmđk)

- Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm $-1-\sqrt{5}\le x\le 0;\ \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}<x<\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}$

Bài 35: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x-2}\ge \sqrt{3\left(x^2-2x-2\right)}$

Bài giải:

- Điều kiện xác định: $x\ge 1+\sqrt{3}$ (1)
- Với điều kiện đó, ký hiệu (2) là bất phương trình đã cho, ta có:

$(2) \Leftrightarrow x^2+2x-2+2\sqrt{x(x+1)(x-2)}\ge 3\left(x^2-2x-2\right)$



$\Leftrightarrow \sqrt{x(x+1)(x-2)} \ge x(x-2)-2(x+1)$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x(x-2)}-2\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x+1}\right) \le 0 \quad (3)$ Do với mọi x thỏa mãn (1), ta có $\sqrt{x(x-2)}+\sqrt{x+1}>0$ nên $(3) \Leftrightarrow \sqrt{x(x-2)} \le 2\sqrt{x+1}$
$\Leftrightarrow x^2-6x-4 \le 0$ $\Leftrightarrow 3-\sqrt{13} \le x \le 3+\sqrt{13} \quad (4)$ Kết hợp (1) và (4), ta được tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\left[1+\sqrt{3};3+\sqrt{13}\right]$

Bài 36: Giải bất phương trình: $\sqrt{9^x+3^x-2} \ge 9-3^x$

Bài giải:

Đặt $t=3^x>0$, bất phương trình trở thành $\sqrt{t^2+t-2} \ge 9-t$ Xét $9-t<0 \Leftrightarrow t>9$, khi đó bất phương trình tương đương với $t^2+t-2 \ge 0 \Rightarrow t>9 \quad (1)$
Xét $t \le 9$, bất phương trình tương đương với $t^2+t-2 \ge 81-18t+t^2 \Leftrightarrow t \ge \frac{83}{19}$. Suy ra $\frac{83}{19} \le t \le 9 \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $t \ge \frac{83}{19}$ khi đó $3^x \ge \frac{83}{19} \Leftrightarrow x \ge \log_3 \frac{83}{19}$. • Vậy nghiệm của bất phương trình gồm các giá trị $x \ge \log_3 \frac{83}{19}$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bài 37: Giải bất phương trình:

$$e^{1+\sqrt{x}}+\sqrt{1+\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}>e^{2x-4\sqrt{x}+3}+\sqrt{2x-4\sqrt{x}+3}+\frac{1}{\sqrt{2x-4\sqrt{x}+3}}$$

Bài giải:

Điều kiện $x\ge 0$

Xét hàm số $f(t)=e^t+\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}$ với $t\in[1;+\infty)$

Ta có $f'(t)=e^t+\frac{t-1}{2t\sqrt{t}}>0$ với $t\in[1;+\infty)$. Suy ra f(t) đồng biến trên $t\in[1;+\infty)$

Do đó từ bất phương trình đã cho tương đương với $1+\sqrt{x}>2x-4\sqrt{x}+3$

$$\Leftrightarrow 2x-5\sqrt{x}+2<0\Leftrightarrow \frac{1}{2}<\sqrt{x}<2\Leftrightarrow \frac{1}{4}<x<4$$

- Vậy tập nghiệm của bất phương trình gồm các giá trị của x thỏa mãn $\frac{1}{4}<x<4$

Bài 38: Giải bất phương trình $\frac{2.9^x-3.6^x}{6^x-4^x}\le 2\quad (x\in\mathbb{R})$

Bài giải:

Ta có $\frac{2.9^x-3.6^x}{6^x-4^x}\le 2\Leftrightarrow \frac{2.9^x-5.6^x+2.4^x}{6^x-4^x}\le 0$
Chia cả tử và mẫu của vế trái cho $4^x>0$, bất phương trình tương đương với $\frac{2.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-5\left(\frac{3}{2}\right)^x+2}{\left(\frac{3}{2}\right)^x-1}\le 0$. Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x, t>0$ bất phương trình trở thành



$$\frac{2t^2-5t+2}{t-1}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le \frac{1}{2} \\ 1<t\le 2 \end{array}\right.$$
Với $t\le \frac{1}{2}$ ta có $\left(\frac{3}{2}\right)^x \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow x\le \log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{2} \Leftrightarrow x\le -\log_{\frac{3}{2}}2$ Với $1<t\le 2$ ta có $1<\left(\frac{3}{2}\right)^x\le 2 \Leftrightarrow 0<x\le \log_{\frac{3}{2}}2$ • Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left(-\infty;-\log_{\frac{3}{2}}2\right]\cup\left(0;\log_{\frac{3}{2}}2\right]$

Bài 39: Giải bất phương trình $\frac{1}{\sqrt{2x^2+3x-5}}\ge \frac{1}{2x-1}$

Bài giải:

Điều kiện $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup(1;+\infty)$
• Xét $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)$, vế trái bất phương trình luôn dương mà vế phải âm nên $x\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)$ là nghiệm bất phương trình
• Xét $x\in(1;+\infty)$ bất phương trình $\Leftrightarrow 2x-1\ge\sqrt{2x^2+3x-5}$ $\Leftrightarrow (2x-1)^2\ge 2x^2+3x-5 \Leftrightarrow 2x^2-7x+6\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 2 \\ x\le \frac{3}{2} \end{array}\right.$



Suy ra $x\in\left(1;\frac{3}{2}\right)\cup[2;+\infty)$ là nghiệm bất phương trình

• Vậy tập nghiệm bất phương trình là $\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right)\cup(1;\frac{3}{2}]\cup[2;+\infty)$

Bài 40: Giải bất phương trình $\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}<1+\sqrt{3+2x-x^2}$

Bài giải:

Giải bất phương trình……

Đk: $-1\le x\le 3$

Đặt $t=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\quad(t\ge 0)\Rightarrow\sqrt{3+2x-x^2}=\frac{t^2-4}{2}$, bpt trở thành:

$\frac{2}{t}<1+\frac{t^2-4}{2}\Leftrightarrow t^3-2t-4>0\Leftrightarrow(t-2)(t^2+2t+2)>0\Leftrightarrow t>2\quad$ (t/m)

Với t > 2 ta có $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}>2\Leftrightarrow\sqrt{3+2x-x^2}>0\Leftrightarrow -1<x<3$

Kết hợp đk ta được nghiệm bpt là: $-1<x<3$

Bài 41: Giải bất phương trình $\frac{\log_2(x^2-2x-7)^5-\log_3(x^2-2x-7)^8}{3x^2-13x+4}<0$

Bài giải:

Điều kiện $\begin{cases}x^2-2x-7>0\\3x^2-13x+4\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1+2\sqrt{2},x\ne 4\\x<1-2\sqrt{2}\end{array}\right.$

PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$Pt \Leftrightarrow \dfrac{5\log_2\left(x^2-2x-7\right)-8\log_3 2.\log_2\left(x^2-2x-7\right)}{3x^2-13x+4}<0 \Leftrightarrow (5-8\log_3 2)\dfrac{\log_2\left(x^2-2x-7\right)}{3x^2-13x+4}<0$ Do $5-8\log_3 2=\log_3 3^5-\log_3 2^8=\log_3 243-\log_3 256<0$ nên $\dfrac{\log_2\left(x^2-2x-7\right)}{3x^2-13x+4}>0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x^2-13x+4>0\\ \log_2\left(x^2-2x-7\right)>0\end{cases}\\ \begin{cases}3x^2-13x+4<0\\ \log_2\left(x^2-2x-7\right)<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x^2-13x+4>0\\ x^2-2x-7>0\end{cases}\\ \begin{cases}3x^2-13x+4<0\\ x^2-2x-7<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>\frac{1}{3}, x\neq 4\\ x<-2\end{array}\right.$ Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm của bất phương trình là $\left[\begin{array}{l}x>1+2\sqrt{2}, x\neq 4\\ x<-2\end{array}\right.$

THÊM DẠNG

Câu 1:

$$\sqrt{x^2+x-2}+x^2\geq\sqrt{2(x-1)}+1.$$

Lờigiải:

Điềukiện: $x\geq 1.$

Bất phương trinh tương đương với:

$$\sqrt{x^2+x-2}+(x-1)(x+1)-\sqrt{2(x-1)}\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\left[\underbrace{\sqrt{x+2}+(x+1)\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}_{\geq\sqrt{3}-\sqrt{2}>0;\forall x\geq 1}\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1\Rightarrow S=[1;+\infty)$$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Câu 2:

$$\sqrt{2x^2-x+3}-\sqrt{21x-17}+x^2-x\geq 0.$$

Lờigiải:

Điềukiện: $x\geq\frac{17}{21}$. Bất phương trinh tương đương:

$$\sqrt{2x^2-x+3}-(x+1)+(x^2+1)-\sqrt{21x-17}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{(x-1)(x-2)(x^2+3x+9)}{x^2+1+\sqrt{21x-17}}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow(x-1)(x-2)\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2x^2-x+3}+x+1}+\frac{x^2+3x+9}{x^2+1+\sqrt{21x-17}}\right]}_{>0,\forall x\geq\frac{17}{21}}\geq 0\Leftrightarrow(x-1)(x-2)\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 2\\x\leq 1\end{array}\right..$$

Kếthợpđiềukiện suy ra tậpnghiệm $S=\left[\frac{17}{21};1\right]\cup[2;+\infty)$.

Câu 3:

$$x^3+2x-(x^2+1)\sqrt{2x-1}>\sqrt[3]{2x^2-x}.$$

Lờigiải:

Điềukiện: $x\geq\frac{1}{2}$. Bất phương trinh tương đương:

$$x(x^2+1)-(x^2+1)\sqrt{2x-1}+x-\sqrt[3]{2x^2-x}>0\Leftrightarrow(x^2+1)(x-\sqrt{2x-1})+x-\sqrt[3]{2x^2-x}>0$$

$$\Leftrightarrow\frac{(x^2+1)(x-1)^2}{x+\sqrt{2x-1}}+\frac{x(x-1)^2}{x^2+x\sqrt[3]{2x^2-x}+\sqrt[3]{(2x^2-x)^2}}>0\Leftrightarrow(x-1)^2>0\Leftrightarrow x\neq 1.$$

Kếthợpđiềukiện suy ra tậpnghiệm $S=\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{1\}$.



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Câu 4:

$$\frac{x^2+5x}{4}<1+\sqrt{x^3+2x^2-4x}.$$

Lờigiải:

Điềukiện: $x^3+2x^2-4x\geq 0.$

Từđiềukiệnbàitoán cho ta $x^2+5x\leq 0$ vớimọi $x\in\left[-1-\sqrt{5};0\right]$. Khi đó BPT luôn đúng.

Ta xétvới $x\geq\sqrt{5}-1\Rightarrow\left(x^2+5x\right)>0.$ Bất phương trinh tương đương:

$$x^2+5x<4+4\sqrt{x^3+2x^2-4x}\Leftrightarrow\left(x^2+5x-4\right)^2<16\left(x^3+2x^2-4x\right)$$
$$\Leftrightarrow x^4-6x^3-15x^3+24x+16<0\Leftrightarrow\left(x^2-7x-4\right)\left(x^2+x-4\right)<0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-7x-4\geq 0\\x^2+x-4\leq 0\end{cases}\\\begin{cases}x^2+x-4\geq 0\\x^2-7x-4\leq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}<x<\dfrac{7-\sqrt{65}}{2}\\\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}<x<\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}\end{array}\right..$$

Kếthợpđiềukiện $x\geq\sqrt{5}-1,$ suy ra tậpnghiệm $S=\left[-1-\sqrt{5};0\right]\cup\left[\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2};\dfrac{7+\sqrt{65}}{2}\right].$

Câu 6:

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{x-1}<\frac{2}{\sqrt{x-1}}.$$

Lờigiải:

Điềukiện $x>1,$ bất phương trình tương đương với:

$$\sqrt{x^2+6x-7}<x+1\Leftrightarrow x^2+6x-7<x^2+2x+1\Leftrightarrow 4x-8<0\Leftrightarrow x<2.$$



Kếthợpđiềukiện suy ra tậpnghiệm $S=(1;2)$.

Câu 7:

$$\frac{4-x}{\sqrt{3-x}}+\sqrt{3-x}\le\sqrt{5+2x}.$$

Lờigiải:

Điềukiện: $-\frac{5}{2}\le x<3.$ Bất phương trinh tương đương:

$$4-x+3-x\le\sqrt{(5+2x)(3-x)}\Leftrightarrow 7-2x\le\sqrt{(5+2x)(3-x)}$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-28x+49\le -2x^2+x+15\Leftrightarrow 6x^2-29x+34\le 0\Leftrightarrow 2\le x\le\frac{17}{6}.$$

Kếthợpđiềukiện suy ra tậpnghiệm $S=\left[2;\frac{17}{6}\right]$.

Hếtrùi ^^

CÂU 8 : $x^3-2x^2+3x+3\sqrt{10-x^2}\ge 11.$

Đk $-\sqrt{10}\le x\le\sqrt{10}.$

Xét $-\sqrt{10}\le x\le 0,$

với $f(x)=x^3-2x^2+3x+3\sqrt{10-x^2}-11; f'(x)=3x^2+4x+3-\frac{6x}{2\sqrt{10-x^2}}>0;\forall x\in\left[-\sqrt{10};0\right]$

Suy ra $f(x)\le f(0)<0\Rightarrow Loai.$

Xét $0<x\le\sqrt{10}.$ (*). BPT tương đương:



$$(x-1)^3-x^2-10+3\sqrt{10-x^2}\ge 0\Leftrightarrow (x-1)^2(x-1)(x+1)+(x+1)\sqrt{10-x^2}\left(3-\sqrt{10-x^2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(3-\sqrt{10-x^2}\right)\left(3+\sqrt{10-x^2}\right)(x-1)^2+(x+1)\sqrt{10-x^2}\left(3-\sqrt{10-x^2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(3-\sqrt{10-x^2}\right)\underbrace{\left[(x-1)^2\left(3-\sqrt{10-x^2}\right)+(x+1)\sqrt{10-x^2}\right]}_{>0}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3-\sqrt{10-x^2}\ge 0\Leftrightarrow 9\ge 10-x^2\Leftrightarrow x^2-1\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\x\le -1\end{array}\right..$$

Kếthợp (*) suy ra tậpnghiệm $S=\left[1;\sqrt{10}\right]$.

CÂU 9 $(x+1)\sqrt{x+2}+(x+6)\sqrt{x+7}\ge 12x^2+7x+12.$

ĐK: $x\ge -2.$

$$(x+1)\left(\sqrt{x+2}-2\right)+(x+6)\left(\sqrt{x+7}-3\right)\ge x^2+2x-8$$

BPT tương đương $\Leftrightarrow (x-2)\underbrace{\left[\frac{x+1}{\sqrt{x+2}+2}+\frac{x+6}{\sqrt{x+7}+3}-(x+4)\right]}_{A}\ge 0$

Với

$$x\ge -2\Rightarrow\sqrt{x+2}+2<\sqrt{x+7}+3\Rightarrow A<\frac{2x+6-(x+4)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{-2-(x+4)\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}+2}<0$$

Suy ra bpt $\Leftrightarrow x-2\le 0\Leftrightarrow x\le 2.$

Kếthợpđiềukiện suy ra $S=[-2;2]$.

CÂU 10 $2x\sqrt{8x^2+1}+\sqrt{x^2+8}\le 6x\sqrt{x}+3.$

ĐK $x\ge 0.$

Bpt tương đương



$$2x\left(\sqrt{8x^2+1}-3\sqrt{x}\right)+\sqrt{x^2+8}-3\le 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x-1)(8x-1)}{\sqrt{8x^2+1}+3\sqrt{x}}+\frac{(x-1)(x+1)}{\sqrt{x^2+8}+3}\le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\underbrace{\left[\frac{2x(8x-1)}{\sqrt{8x^2+1}+3\sqrt{x}}+\frac{x+1}{\sqrt{x^2+8}+3}\right]}_{A}\le 0$$

Với $x\ge \frac{1}{8}\Rightarrow A>0.$

Với $x\in\left[0;\frac{1}{8}\right]\Rightarrow 1-8x\ge 0\Rightarrow 2x(1-8x)=\frac{1}{4}.8x(1-8x)\le\frac{1}{16}\Rightarrow 2x(8x-1)\ge -\frac{1}{16}.$

Mà $\frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}\ge\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{64}+8}+3}=\frac{64-8\sqrt{57}}{21}>\frac{1}{16}\Rightarrow A>0.$

Suy ra bpt $\Leftrightarrow x-1\le 0\Leftrightarrow x\le 1.$

Vậy $S=[0;1].$

1. $\sqrt{x^2+16}-3\sqrt{x^2-3x+4}\ge\sqrt{x+1}-3.$

Đk $x\ge -1.$

BPT tương đương

$$\sqrt{x^2+16}+3\ge 3\sqrt{x^2-3x+4}+\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 8x^2-26x+12+6\sqrt{(x+1)(x^2-3x+4)}-6\sqrt{x^2+16}\le 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[3\sqrt{x^3-2x^2+x+4}-(2x+6)\right]+\left(x^2-36\right)-9\sqrt{x^2+16}+3\sqrt{x^2+16}-(x+12)+7x-21x\le 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3)\underbrace{\left[\frac{2(9x+5)}{3\sqrt{x^2-2x^2+x+4}+2x+6}+\frac{x(x+3)}{x^2+36+9\sqrt{x^2+16}}+\frac{8}{3\sqrt{x^2+16}+x+12}+7\right]}_{A}\le 0$$

Xét

$$A=\frac{22x+22+6\sqrt{x^3-2x^2+x+4}}{3\sqrt{x^3-2x^2+x+4}+2x+6}+\frac{2x^2+3x+36+9\sqrt{x^2+16}}{x^2+36+9\sqrt{x^2+16}}+\frac{8}{3\sqrt{x^2+16}+x+12}+4>0$$

Suy ra bpt tương đương $x(x-3)\le 0 \Leftrightarrow 0\le x\le 3.$

Vậy $S=[0;3].$

CÂU 11 $\sqrt{x^2+x+2}+x^3+2x^2+x\ge (x^2+1)\sqrt{3x+6}.$

ĐK $x\ge -2.$

BPT tương đương

$$\sqrt{x^2+x+2}-2+(x^3+x^2+4)-(x^2+1)\sqrt{3x+6}+x^2+x-2\ge 0$$

với $$\Leftrightarrow (x^2+x-2)\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+x+2}+2}+\frac{x^4-2x^3-x^2-x-5}{x^3+x^2+4+(x^2+1)\sqrt{3x+6}}+1\right]}_{A}\ge 0.$$

Xét $A=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+2}+2}+\dfrac{(x^2+1)(x^2-x-1+\sqrt{3x+6})}{x^3+x^2+4+(x^2+1)\sqrt{3x+6}}.$

Ta CM A>0 hay $x^2-x-1+\sqrt{3x+6}>0;\forall x\ge -2.$

Xét $f(x)=x^2-x-1+\sqrt{3x+6};x\ge -2.$ Có $f'(x)=2x-1+\dfrac{3}{2\sqrt{3x+6}}.$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2(2x-1)\sqrt{3x+6}+3=0\Leftrightarrow x=-2\vee x=\dfrac{1}{2}.$

Có $f(-2)=5;f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{30}-5}{4}\Rightarrow f(x)\ge f\left(\dfrac{1}{2}\right)>0\Rightarrow A>0.$

Khi đó BPT $\Leftrightarrow x^2+x-2\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ x\le -2\end{array}\right..$

Kếthợpđiềukiện suy ra $S=\{2\}\cup[1;+\infty).$

Bài 12 : Giải bất phương trình sau $\dfrac{2x^3-5x^2+4}{3x^2+4x-4}>\dfrac{2x-4}{1+\sqrt{2x-3}}$

Lời giải



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Điều kiện: $x \geq \frac{3}{2}, 3x^2 + 3x - 4 \neq 0$

Do $x \geq \frac{3}{2} \Rightarrow 3x^2 + 3x - 4 \geq 3.\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3.\frac{3}{2} - 4 > 0$ nên bất phương trình đã cho tương đương

$$2x^3 - 5x^2 + 4 > \frac{(3x^2 + 4x - 4)\left(\sqrt{2x-3}+1\right)\left(\sqrt{2x-3}-1\right)}{\sqrt{2x-3}+1} > 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + 4 > (3x^2 + 4x - 4)\left(\sqrt{2x-3}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 2x^2 + 4x > (3x^2 + 4x - 4)\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2\sqrt{2x-3} - 2(2x-3)\sqrt{2x-3} - x(2x-3) + x - 2\sqrt{2x-}$$

Đặt $a = \sqrt{2x-3}$ bất phương trình trở đã cho trở thành

$$2x^3 - 3x^2a - 2a^3 - xa^2 + x - 2a > 0 \Leftrightarrow (x-2a)(2x^2 + xa + a^2) + (x-2a) > 0 \Leftrightarrow (x-2a)(2x^2 + xa + a^2 + 1)$$

$$\Rightarrow x > 2a \Rightarrow x > 2\sqrt{2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x^2 > 4(2x-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x^2 - 8x + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 6 \\ \frac{3}{2} \leq x < 2 \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \left[\frac{3}{2}; 2\right) \cup (6; +\infty)$

Bài 13 : Giải bất phương trình sau $\frac{2x+1}{39 + 12\sqrt{6-x-x^2}} > \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{2-x}}{17 + 2\sqrt{6-x-x^2}}$

Lời giải

Điều kiện: $6 - x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2$

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\frac{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}\right)}{39 + 12\sqrt{6-x-x^2}} > \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}}{17 + 2\sqrt{6-x-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}}{39 + 12\sqrt{6-x-x^2}} - \frac{1}{17 + 2\sqrt{6-x-x^2}}\right) > 0$$



Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+3}\left(t\ge 0\right)\Rightarrow t^2=5+2\sqrt{6-x-x^2}\Leftrightarrow 2\sqrt{6-x-x^2}=t^2-5$ bất phương trình trở thành

$$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}\right)\left(\frac{t}{39+6\left(t^2-5\right)}-\frac{1}{17+t^2-5}\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}\right)\left(t^3-6t^2+12t-9\right)>0$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}\right)\left(t-3\right)\left(t^2-3t+3\right)>0$$

Do $t^2-3t+3>0$ nên bất phương trình tương đương

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}\right)\left(t-3\right)>0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}-3\right)\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{2-x}\right)>0$$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}>\sqrt{2-x}\\ \sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3>2-x\\ 5+2\sqrt{6-x-x^2}>9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{6-x-x^2}>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{2}\\ 6-x-x^2>4\end{cases}\Leftrightarrow x>1$$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}<\sqrt{2-x}\\ \sqrt{x+3}+\sqrt{2-x}<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+3<2-x\\ 5+2\sqrt{6-x-x^2}<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{6-x-x^2}<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-\dfrac{1}{2}\\ 6-x-x^2<4\end{cases}\Leftrightarrow x<-2$$

Kết hợp với điều kiện, vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left[-3;-2\right)\cup\left(1;2\right]$

Bài 14: Giải bất phương trình sau $\left(x-1-2\sqrt{x-2}\right)\left(5\sqrt[3]{2x+2}+3x-\sqrt{x-2}-6\right)\ge 3\left(x-3\right)^2$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 2$

Bất phương trình đã cho tương đương

$\left[(x-1)^2-4(x-2)\right]\left(5\sqrt[3]{2x+2}+3x-\sqrt{x-2}-6\right)\ge 3(x-3)^2\left(x-1+2\sqrt{x-2}\right)$

$\Leftrightarrow (x-3)^2\left(5\sqrt[3]{2x+2}+3x-\sqrt{x-2}-6\right)\ge 3(x-3)^2\left(x-1+2\sqrt{x-2}\right)$

$\Leftrightarrow (x-3)^2\left(5\sqrt[3]{2x+2}+3x-\sqrt{x-2}-6-3x+3-6\sqrt{x-2}\right)\ge 0 \Leftrightarrow (x-3)^2\left(5\sqrt[3]{2x+2}-7\sqrt{x-2}-3\right)\ge 0$

Trường hợp 1: $(x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=3$

Trường hợp 2: $5\sqrt[3]{2x+2}-7\sqrt{x-2}-3\ge 0$

Đặt $t=\sqrt{x-2}\,(t\ge 0)\Rightarrow t^2=x-2 \Leftrightarrow x=t^2+2$ bất phương trình đã cho trở thành

$5\sqrt[3]{2\left(t^2+2\right)+2}-7t-3\ge 0 \Leftrightarrow 5\sqrt[3]{2t^2+6}\ge 7t+3 \Leftrightarrow 125\left(2t^2+6\right)\ge (7t+3)^3$

$\Leftrightarrow 343t^3+191t^2+189t-723\le 0 \Leftrightarrow (t-1)\left(343t^2+534t+723\right)\le 0 \Leftrightarrow t\le 1$

$\Rightarrow \sqrt{x-2}\le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x-2\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x\le 3\end{cases} \Leftrightarrow 2\le x\le 3$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=[2;3]$

Bài 15 : Giải bất phương trình sau $\left(x^2-2x-2\right)\sqrt{x+1}+(2x-1)\sqrt{x^2-1}+3\le x^2$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1$

Bất phương trình đã cho tương đương

$\left(x^2-3\right)\sqrt{x+1}-x^2+3+(2x-1)\sqrt{x^2-1}-(2x-1)\sqrt{x-1}\le 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(x^2-3\right)+(2x-1)\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+1}-1\right)\le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)\left[x^2-3+(2x-1)\sqrt{x-1}\right]\le 0$

Do $\sqrt{x+1}-1=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}>0$ nên bất phương trình đã cho tương đương



$x^2-3+(2x-1)\sqrt{x-1}\le 0 \Leftrightarrow$

$(x-1)+(2x-1)\sqrt{x-1}+x^2-x-2\le 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}+x+1\right)\left(\sqrt{x+1}+x-2\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+x-2\le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1}\le 2-x \Leftrightarrow \begin{cases}2-x\ge 0\\ x-1\le(2-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\ x^2-5x+5\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \frac{5+\sqrt{5}}{2}\\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\le x\le 2\end{array}\right.$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left[\frac{5-\sqrt{5}}{2};2\right]\cup\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$

Bài 16: Giải bất phương trình sau $\sqrt{x(8x-15)}\ge\sqrt{4x^2-5x+1}-2\sqrt{x-2}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 2$

Do $\sqrt{4x^2-5x+1}-2\sqrt{x-2}=\frac{4x^2-9x+9}{\sqrt{4x^2-5x+1}+2\sqrt{x-2}}>0$ nên bất phương trình đã cho tương đương

$8x^2-15x\ge 4x^2-5x+1+4(x-2)-4\sqrt{(x-1)(4x-1)(x-3)} \Leftrightarrow 4x^2-14x+7+4\sqrt{4x^2-9x+2}\sqrt{x-1}\ge 0$

$\Leftrightarrow \left(4x^2-9x+2\right)+4\sqrt{4x^2-9x+2}\sqrt{x-1}-5(x-1)\ge 0$

Đặt $a=\sqrt{4x^2-x+2}, b=\sqrt{x-1}\,(a,b\ge 0)$ bất phương trình đã cho trở thành

$a^2+4ab-5b^2\ge 0\Leftrightarrow (a-b)(a+5b)\ge 0\Leftrightarrow a\ge b\Rightarrow \sqrt{4x^2-9x+2}\ge\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 4x^2-10x+3\ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge\frac{5+\sqrt{13}}{4}\\ x\le\frac{5-\sqrt{13}}{4}\end{array}\right.$



Kết hợp với điều kiện, vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left[\frac{5+\sqrt{13}}{4};+\infty\right)$

Bài 17: Giải bất phương trình sau $x+\frac{1}{x}+1\ge\frac{x+2}{2}\sqrt{x+\frac{2}{x}+1}$

Lời giải

Điều kiện: $x>0$

Bất phương trình đã cho tương đương

$$2x+\frac{2}{x}+2\ge(x+2)\sqrt{x+\frac{2}{x}+1}\Leftrightarrow\left(x+\frac{2}{x}+1\right)-(x+2)\sqrt{x+\frac{2}{x}+1}+x+1\ge0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+\frac{2}{x}+1}-1\right)\left(\sqrt{x+\frac{2}{x}}-x\right.$$

Do $\sqrt{x+\frac{2}{x}+1}-1>0$ nên bất phương trình tương đương

$$\sqrt{x+\frac{2}{x}+1}-x-1\ge0\Leftrightarrow\sqrt{x+\frac{2}{x}+1}\ge x+1\Leftrightarrow x+\frac{2}{x}+1\ge(x+1)^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2\le0\Leftrightarrow x\le1$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=(-\infty;1]$

Bài : Giải bất phương trình sau $3x^3+3x^2-4x+3<\sqrt{3x+1}+\sqrt{5x+4}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge-\frac{1}{3}$

Bất phương trinh đã cho tương đương



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

$3x^3+3x^2-6x+(x+1)-\sqrt{3x+1}+(x+2)-\sqrt{5x+4}<0$

$\Leftrightarrow 3(x^2-x)(x+2)+\frac{x^2-x}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{x^2-x}{x+2+\sqrt{5x+4}}<0$ Do

$\Leftrightarrow (x^2-x)\left(3x+6+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}\right)<0$

$3x+6+\frac{1}{x+1+\sqrt{3x+1}}+\frac{1}{x+2+\sqrt{5x+4}}>0, \forall x\geq -\frac{1}{3}$ nên ta có $x^2-x<0\Leftrightarrow 0<x<1$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=(0;1)$

Bài 18 : Giải bất phương trình sau $2x^2-x+2\leq\sqrt{5x-2}+x\sqrt{11x+7}$

Lời giải

Điều kiện: $x\geq\frac{2}{5}$

Bất phương trình đã cho tương đương

$x-\sqrt{5x-2}+x^2+3x-x\sqrt{11x+7}+x^2-5x+2\leq 0\Leftrightarrow\frac{x^2-5x+2}{x+\sqrt{5x-2}}+x\frac{x^2-5x+2}{x+3+\sqrt{11x+7}}+(x^2-5x+2)\leq 0$

$\Leftrightarrow (x^2-5x+2)\left(\frac{1}{x+\sqrt{5x-2}}+\frac{x}{x+3+\sqrt{11x+7}}+1\right)\leq 0\Leftrightarrow x^2-5x+2\leq 0\Leftrightarrow\frac{5-\sqrt{17}}{2}\leq x\leq\frac{5+\sqrt{17}}{2}$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=S=\left[\frac{5-\sqrt{17}}{2};\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$

Bài 19 : Giải bất phương trình sau $\frac{\sqrt{x^2-x-6}+7\sqrt{x}-\sqrt{6(x^2+5x-2)}}{x+3-\sqrt{2(x^2+10)}}\leq 0$

Lời giải

Điều kiện: $x\geq 3$



Do $x+3-\sqrt{2\left(x^2+10\right)}=\dfrac{-x^2+6x-11}{x+3+\sqrt{2\left(x^2+10\right)}}<0$ nên bất phương trình đã cho tương đương

$\sqrt{x^2-x-6}+7\sqrt{x}\ge\sqrt{6\left(x^2+5x-2\right)}\Leftrightarrow x^2-x-6+49x+14\sqrt{x\left(x^2-x-6\right)}\ge 6x^2+5x-2$

$\Leftrightarrow 5x^2-18x-6-14\sqrt{\left(x^2-3x\right)\left(x+2\right)}\le 0\Leftrightarrow 5\left(x^2-3x\right)-14\sqrt{\left(x^2-3x\right)\left(x+2\right)}-3\left(x+3\right)\le 0$

Đặt $a=\sqrt{x^2-3x},b=\sqrt{x+2}\left(a,b\ge 0\right)$ bất phương trình đã cho tương đương

$5a^2-14ab-3b^2\le 0\Leftrightarrow\left(a-3b\right)\left(5a+b\right)\le 0\Leftrightarrow a\le 3b\Rightarrow\sqrt{x^2-3x}\le 3\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow x^2-3x\le 9\left(x+2\right)\Leftrightarrow x^2-12x-18\le 0\Leftrightarrow 6-3\sqrt{6}\le x\le 6+3\sqrt{6}$

Kết hợp với điều kiện, vật bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left[3;6+3\sqrt{6}\right]$

Bài 20: Giải bất phương trình sau $\dfrac{\left(2x-1\right)\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x}+\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{1-x}+1-x}\ge 1$

Lời giải

Điều kiện: $0\le x\le 1$

Do $0\le x\le 1$ nên $2\sqrt{x}+\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{1-x}+1-x>0$ bất phương trình đã cho tương đương

$\left(2x-1\right)\sqrt{x+3}\ge 2\sqrt{x}+\left(2+\sqrt{x}\right)\sqrt{1-x}+1-x\Leftrightarrow\left(2x-1\right)\sqrt{x+3}\ge\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)\left(2+\sqrt{1-x}\right)$

Đặt $a=\sqrt{x},b=\sqrt{1-x}\left(a,b\ge 0\right)$ ta có $\begin{cases}a^2+b^2=1\\2a^2+b^2-1=x\end{cases}$ bất phương trình đã cho trở thành

$\left(a^2-b^2\right)\sqrt{2a^2+b^2+2}\ge\left(a+b\right)\left(b+2\right)\Leftrightarrow\left(a-b\right)\sqrt{2a^2+b^2+2}\ge b+2$

$\Leftrightarrow\left(a-b\right)^2\left(2a^2+b^2+2\right)\ge\left(b+2\right)^2$

$\Leftrightarrow\left(1-2ab\right)\left(a^2+3\right)\ge b^2+4b+4\Leftrightarrow\left(1-2ab\right)\left(a^2+3\right)\ge 4b+5-b^2\Leftrightarrow\left(2a^2-2\right)-2b\left(a^3+3a+2\right)\ge 0$



Mà $a^2 \le 1$ và $a^3+3a+2>0$ nên $\left(2a^2-2\right)-2b\left(a^3+3a+2\right)\le 0$ nên dấu "=" xảy ra khi

$$\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1\}$

Bài 22 : Giải bất phương trình sau $\dfrac{6-3x+\sqrt{2x^2+5x+2}}{3x-\sqrt{2x^2+x+2}} \le \dfrac{1-x}{x}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\ne 0 \\ 3x-\sqrt{2x^2+5x+2}\ne 0 \\ 2x^2+5x+2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2]\cup\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)\backslash\{0;1\}$

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\frac{6-3x+\sqrt{2x^2+5x+2}}{3x-\sqrt{2x^2+5x+2}}+1\le 1+\frac{1-x}{x} \Leftrightarrow \frac{6}{3x-\sqrt{2x^2+5x+2}}\le\frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{3x+\sqrt{2x^2+5x+2}}{x\left(3x-\sqrt{2x^2+5x+2}\right)}\le 0$$

Trường hợp 1: $\sqrt{2x^2+5x+2}+3x=0 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=9x^2 \Leftrightarrow 7x^2-5x-2=0 \Rightarrow x=-\dfrac{2}{7}$

Trường hợp 2: $3x+\sqrt{2x^2+5x+2}\ne 0$ bất phương trình trở thành

$$\frac{\left(3x+\sqrt{2x^2+5x+2}\right)^2}{x\left(7x^2-5x-2\right)}\le 0 \Leftrightarrow x\left(7x^2-5x-2\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<1 \\ x<-\dfrac{2}{7} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện, vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=(-\infty;2)\cup\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{2}{7}\right]\cup(0;1)$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bài 23 : Giải bất phương trình sau $\dfrac{x+2}{\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}-1}\ge\dfrac{1}{x-1}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ne 1$

Khi đó $\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}-1=\sqrt{2\left(x^2-1\right)^2+\dfrac{3}{2}}-1>0$

Trường hợp 1: $x>1$ bất phương trình đã cho tương đương $x^2+x-1\ge\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}$

Ta có $x^2+x-1=x+\left(x^2-1\right)\le\sqrt{2\left[x^2+\left(x^2-1\right)^2\right]}=\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}$

Dấu "=" xảy ra khi $x^2-1=x\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 2: $x<1$ bất phương trình đã cho tương đương $x^2+x-1\le\sqrt{2\left(x^4-x^2+1\right)}$ (luôn đúng)

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left(-\infty;1\right)\cup\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Bài 24 : Giải bất phương trình sau $\dfrac{\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+3x}-\sqrt{3-x}}\ge\dfrac{4}{x}$

Lời giải

Điều kiện: $x\in\left[-1;3\right]\setminus\left\{0\right\}$

Trường hợp 1: $x\in\left(0;3\right]$

Ta có $\sqrt{3+3x}-\sqrt{3-x}=\dfrac{4x}{\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}}>0$ nên bất phương trình đã cho tương đương



$$\frac{\left(\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}\right)^2}{4x} \ge \frac{4}{x} \Leftrightarrow 6+2x+2\sqrt{(3+3x)(3-x)} \ge 16 \Leftrightarrow \sqrt{(3+3x)(3-x)} \ge 5-x$$

$$\Leftrightarrow (3+3x)(3-x) \ge (5-x)^2 \Leftrightarrow x^2-4x+4 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=2$$

Trường hợp 2: $x \in [-1;0)$

Ta có $\sqrt{3+3x}-\sqrt{3-x} = \dfrac{4x}{\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}} < 0$ nên bất phương trình đã cho tương đương

$$\frac{\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+3x}} \le \frac{4}{-x} \Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}\right)^2}{(3-x)-(3+3x)} \le \frac{4}{-x} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3+3x}+\sqrt{3-x}\right)^2 \le 16$$

$$\Leftrightarrow 6+2x+2\sqrt{(3+3x)(3-x)} \le 16 \Leftrightarrow \sqrt{(3+3x)(3-x)} \le (5-x) \Leftrightarrow (x-2)^2 \ge 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=[-1;0)\cup\{2\}$

Bài 26: Giải bất phương trình sau $\dfrac{\sqrt{x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3}} \ge 1$

Lời giải

Điều kiện: $0 \le x \le 1$

Ta có $x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3} \ge x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2} = x\sqrt{x}+1-x > 0, \forall x \in [0;1]$ nên bất phương trình đã cho tương đương



$$\sqrt{x}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\ge x\sqrt{x}+1-\sqrt{x^2-x^3}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x^3}\ge 1-\sqrt{x\left(1-x^2\right)}\Leftrightarrow x^2-x^3\ge 1+x\left(1-x^2\right)-2\sqrt{x\left(1-x^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow x+1-x^2-2\sqrt{x\left(1-x^2\right)}\le 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{x}\right)^2\le 0\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x}\Leftrightarrow x^2+x-1=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(l)\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Bài 27 : Giải bất phương trình sau $\left(\sqrt{3x^2-12x+5}+\sqrt{x^2-2x}\right)\sqrt{x^3-1}\ge 2x^2-10x+5$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 2$

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\left(\sqrt{3x^2-12x+5}+\sqrt{x^2-2x}\right)\sqrt{x^3-1}\ge\left(3x^2-12x+5\right)-\left(x^2-2x\right)$$

$$\Leftrightarrow\left(\sqrt{3x^2-12x+5}+\sqrt{x^2-2x}\right)\sqrt{x^3-1}\ge\left(\sqrt{3x^2-12x+5}+\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt{3x^2-12x+5}-\sqrt{x^2-2x}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^3-1}\ge\sqrt{3x^2-12x+5}-\sqrt{x^2-2x}\Leftrightarrow\sqrt{x^3-1}+\sqrt{x^2-2x}\ge\sqrt{3x^2-12x+5}$$

$$\Leftrightarrow x^3+x^2-2x-1+2\sqrt{\left(x^3-1\right)\left(x^2-2x\right)}\ge 3x^2-12x+5$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2+10x+6+2\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)\left(x^3+x^2+x\right)}\ge 0$$



$$\Leftrightarrow \left(x^3+x^2+x\right)-3\left(x^2-3x+2\right)+2\sqrt{\left(x^2-3x+2\right)\left(x^3+x^2+x\right)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^3+x^2+x}-\sqrt{x^2-3x+2}\right)\left(\sqrt{x^3+x^2+x}+3\sqrt{x^2-3x+2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^3+x^2+x}\ge \sqrt{x^2-3x+2}\Leftrightarrow x^3+4x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left[2;+\infty\right)$

Bài 29: Giải bất phương trình sau $\sqrt{\left(x-1\right)^3}+\left(x+3\right)\sqrt{2x-3}\le 3x\left(x-1\right)$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge \dfrac{3}{2}$

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\left(x-1\right)\sqrt{x-1}+\left(x+3\right)\sqrt{2x-3}\le 3x^2-3x\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(\sqrt{x-1}-1\right)+\left(x+3\right)\left(\sqrt{2x-3}-1\right)\le 3x^2-5x-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-1\right)\left(x-2\right)}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{2\left(x+3\right)\left(x-2\right)}{\sqrt{2x-3}+1}\le \left(x-2\right)\left(3x+1\right)\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left[\left(3x+1\right)-\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{x+3}{\sqrt{2x-3}+1}\right)\right]\ge 0$$

Ta có

$$\frac{x-1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{x+3}{\sqrt{2x-3}+1}<x-1+x+3=2x+2<3x+1,\forall x\ge \frac{3}{2}\Rightarrow 3x+1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{x-1}+1}+\frac{2\left(x+3\right)}{\sqrt{2x-3}+1}\right)>0$$

Khi đó bất phương trình trở thành $x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\left[2;+\infty\right)$

Bài29 : Giải bất phương trình sau $\sqrt{2x^4-6x^3+10x^2-6x+8}-\sqrt{x^3+x}\le \left(x-2\right)\sqrt{x^2+1}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 0$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{(x^2+1)(2x^2-6x+8)}-\sqrt{x(x^2+1)}\le (x-2)\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+8}-\sqrt{x}\le x-2\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+8}\le x+$$

Do $x=0$ không thỏa mãn bất phương trình nên bất phương trình tương đương

$$\sqrt{2\left(x+\frac{4}{x}\right)-6}-1-\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\le 0\Leftrightarrow \sqrt{2\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2+2}\le\left(\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)+1$$

Đặt $t=\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$ bất phương trình trở thành

$$\sqrt{2t^2+2}\le t+1\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ 2t^2+2\le (t+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge -1\\ (t-1)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow t=1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}=1\Leftrightarrow x-\sqrt{x}-2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-2\right)=0\Leftrightarrow x=4$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{4\}$

Bài 30: Giải bất phương trình sau $\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+1}{x(x^2+1)}}\ge\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}+2-\dfrac{x^2+1}{x}$

Lời giải

Điều kiện: $x>0$

Bất phương trình đã cho tương đương $\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}.\dfrac{x^2-x+1}{x}}\ge\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}}-\dfrac{x^2-x+1}{x}+1$

Đặt $a=\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}},b=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x}}\,(a,b>0)$ bất phương trình trở thành

$$ab\ge a+1-b^2\Leftrightarrow (b-1)(a+b+1)\ge 0\Leftrightarrow b\ge 1\Rightarrow\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x}}\ge 1\Leftrightarrow (x-1)^2\ge 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=(0;+\infty)$



PHƯƠNG TRÌNH - BẤT PT

Bài 31: Giải bất phương trình sau $2\left(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}\right)-\sqrt{1-x^4}\le 3x^2+1$

Lời giải

Điều kiện: $-1\le x\le 1$

Đặt $a=\sqrt{1+x^2}, b=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{1-x^4}=ab\\ 3x^2+1=2a^2-b^2\end{cases}$ bất phương trình đã cho trở thành

$2(2a-b)-ab\le 2a^2-b^2\Leftrightarrow 2(2a-b)\le(2a-b)(a+b)\Leftrightarrow(2a-b)(a+b-2)\ge 0$

Do $a\ge b\ge 0\Rightarrow 2a-b\ge 0\Rightarrow a+b-2\ge 0\Rightarrow\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\ge 2\Leftrightarrow\sqrt{1-x^4}\ge 1\Leftrightarrow x=0$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{0\}$